

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:

ФИО: Агафонов Александр Викторович

Должность: директор филиала

Дата подписания: 04.07.2026 14:11:19

Уникальный программный ключ:

2539477a8ecf706dc9cff164bc411eb6d3c4ab06

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра транспортно-технологических машин



Теоретическая механика

(наименование дисциплины)

Методические указания по выполнению расчетно-графических работ

Специальность	23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства (код и наименование специальности)
Специализация	«Автомобили и тракторы» (наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	инженер
Форма обучения	очная, заочная

Чебоксары, 2021

Методические указания разработаны
в соответствии с требованиями ФГАОУ ВО
по специальности

23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства

Авторы:

Никулин Игорь Васильевич,

доцент, к.т.н. кафедры транспортно-технологических машин

ФИО, ученая степень, ученое звание или должность, наименование кафедры

Методические указания одобрены на заседании кафедры

Транспортно-технологические машины

наименование кафедры

протокол № 10 от 15.05.2021 года.

1. Порядок выбора и утверждения темы расчетно-графической работы

Тема расчетно-графической работы определяется студентом совместно с преподавателем на основании перечня направлений научно-исследовательской деятельности, ежегодно утверждаемых кафедрами, и затем формулируется им в первоначальной редакции.

2. Структура и содержание расчетно-графической работы

Расчетно-графическая работа должен отвечать следующим требованиям к структуре:

- введение;
- основная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Во введении обсуждается постановка задачи, выбор и обоснование начальных условий. В основной части приводятся все произведенные расчеты. В заключении анализируются и обсуждаются полученные результаты.

Цель расчетно-графической работы: выбрать материал резервуара, рассчитать нагрузки, действующие на резервуар, выбрать оптимальные размеры, выполнить расчет на прочность, устойчивость и опрокидывание резервуара, расчет и конструирование днища и покрытия резервуара.

3. Порядок оформления расчетно-графической работы

Расчетно-графическая работа выполняется на компьютере на стандартных листах А4. Текст печатается на одной стороне листа. На странице должно **располагаться 28-30 строк, каждая из которых содержит 60-65 знаков, включая пробелы. Междустрочный интервал – 1,5, шрифт текста – 14 (Times New Roman), в таблицах - 12, в подстрочных сносках -10.** Текст печатается строчными буквами (кроме заглавных), выравнивается по ширине с использованием переносов слов. На титульном листе надпись: расчетно-графическая работа печатается 18 шрифтом. Подчеркивание слов и выделение их курсивом внутри самой работы не допускается. Однако заголовки и подзаголовки при печатании текста письменной работы выделяются полужирным шрифтом. Абзацный отступ должен **соответствовать 1,25 см** и быть одинаковым по всей работе.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы составляет **25-35 страниц**. В данный объем не входят приложения и список использованных источников. По согласованию с преподавателем объем работы может быть увеличен.

Страницы, на которых излагается текст, должны иметь поля: **левое -30 мм, правое - 10 мм, верхнее - 20 мм, нижнее - 20 мм.**

В тексте работы «Введение», название глав, «Заключение» и «Список использованной литературы» печатаются (начинаются) с новой страницы.

Расстояние между заголовком и подзаголовком, заголовком и последующим текстом, подзаголовком и предыдущим текстом отделяют

двумя полуторными межстрочными интервалами, а между подзаголовком и последующим текстом - одним полуторным межстрочным интервалом.

Главы письменных работ нумеруются арабскими цифрами и должны начинаться с новой страницы (листа). Номер главы состоит из числа: 1, 2 и т.д.

Заголовки (подзаголовки) располагаются центрированным (посередине текста) способом.

Страницы письменных работ должны иметь сквозную нумерацию арабскими цифрами по всему тексту. Номер страницы проставляют в внизу поля страницы по центру без точки в конце. Первой страницей письменной работы является титульный лист. Он не нумеруется. В работе второй страницей является содержание.

Титульный лист должен содержать наименование учебного заведения, формы обучения, обозначение характера работы (курсовая), ее тему, фамилию, имя, отчество выполнившего ее студента, номер курса и группы, ученую степень, должность или ученое звание научного руководителя, его фамилию и инициалы, графы «Дата сдачи», «Допустить к защите», «Дата защиты», «Оценка», место и год написания работы.

Оглавление работы, которое следует после титульного листа, должно содержать названия элементов структуры работы и номера листов, с которых они начинаются.

При использовании литературы и цитировании отдельных научных положений студент обязан осуществлять в сносках ссылки на авторов и источники, откуда он заимствует материал (фамилия и инициалы автора, название работы, место и год издания, конкретная страница, откуда заимствована цитата). При этом цитирование допускается только в ограниченном объеме, оправданном целью цитирования (для обоснования актуальности рассматриваемого вопроса; демонстрации различных взглядов, существующих в науке по проблемам темы, подтверждения или опровержения выдвигаемых студентом тезисов и т.п.).

Прямое цитирование в тексте обязательно оформляется с помощью кавычек. В случае буквального воспроизведения положений научных трудов без указания на их названия и авторов расчетно-графическая работа к защите не допускается.

В списке использованных источников должны быть указаны только те материалы, на которые имеется ссылка (сноска) в работе.

Если в курсовой работе имеются приложения, их необходимо пронумеровать. Все листы расчетно-графической работы должны быть пронумерованы.

Нумерация страниц в курсовой работе должна быть сплошной. Студент отвечает за грамотность и аккуратность оформления расчетно-графической работы.

Наличие грамматических, орфографических и пунктуационных ошибок либо небрежное оформление работы может послужить причиной неудовлетворительной оценки работы.

4. Порядок представления расчетно-графической работы на защиту

Расчетно-графическая работа, подготовленный студентом в окончательной форме, должна быть представлена делопроизводителю кафедры в следующем комплекте:

в письменной форме в прошитом, сброшюрованном или скрепленном виде – 1 экземпляр;

в электронной форме посредством направления на электронный почтовый адрес кафедры транспортно-энергетических систем ttm@chebpolytech.ru – 1 экземпляр.

Делопроизводитель кафедры после регистрации факта и даты сдачи расчетно-графической работы передает ее для проверки научным руководителем.

Передача расчетно-графической работы в электронной форме может быть осуществлена путем направления ее студентом непосредственно научному руководителю по электронной почте.

После поступления расчетно-графической работы на кафедру научный руководитель проверяет ее в течение 14 календарных дней с момента поступления на кафедру, после чего возвращает ее делопроизводителю со своим отзывом. В отзыве указываются следующие положения:

- наименование учебного заведения, кафедры, формы обучения;
- обозначение характера работы (курсовая), ее тему;
- фамилию, имя, отчество выполнившего ее студента, номер курса и группы;
- ученую степень, должность или ученое звание научного руководителя, его фамилию и инициалы;
- соответствие представленной расчетно-графической работы общим требованиям, указанным в настоящих Методических указаниях;
- указание на имеющиеся в курсовой работе недостатки (как по форме, так и по содержанию работы), не препятствующие допуску работы к защите;
- вывод о возможности допуска расчетно-графической работы к защите.

В случае если поставленные научным руководителем вопросы не ясны студенту, он вправе уточнить их у научного руководителя лично во время его еженедельных консультаций (дежурств на кафедре) или дистанционно через электронную почту.

В случае формулирования научным руководителем вывода о невозможности допуска расчетно-графической работы к защите расчетно-графическая работа подлежит подготовке заново с учетом замечаний, указанных научным руководителем, и повторному представлению на защиту в порядке, предусмотренном разделами 3-5, тому же научному руководителю.

5. Порядок защиты расчетно-графической работы

Защита расчетно-графической работы может проводиться только научному руководителю.

Защита расчетно-графической работы проводится в форме, установленной научным руководителем. При устной форме защиты расчетно-графической работы студент должен подготовить ответы на вопросы, поставленные ему научным руководителем в рецензии.

Научный руководитель вправе по своему усмотрению задавать студенту дополнительные вопросы для проверки уровня и качества освоения им знаний по теме расчетно-графической работы, а также для дополнительной проверки самостоятельности выполнения расчетно-графической работы.

По итогам защиты научный руководитель определяет, может ли быть защита зачтена, или требуется повторная защита.

По итогам первоначальной или (в случае ее неудачи) повторной защиты расчетно-графической работы научный руководитель ставит отметку о защите расчетно-графической работы в зачетной книжке студента, в ведомости и на титульном листе работы.

После защиты рецензия и расчетно-графическая работа подлежат сканированию самим студентом и заливке в Электронную информационно-образовательную среду (Электронное портфолио) Чебоксарского института (филиала) Московского политехнического университета по адресу <http://students.polytech21.ru/login.php>, после чего работа в письменной форме передаются студентом делопроизводителю для хранения в архиве Филиала.

В соответствии с учебным планом и планами студентов специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» по теоретической механике выполняют расчетно-графическую работу (РГР). Она способствует приобретению навыков решения задач по основным разделам дисциплины и, как следствие лучшему освоению материала. Существенной помощью студентам при решении задач являются примеры решения аналогичных задач, основной целью которых является разъяснение хода решения, но не воспроизвести его полностью. При выполнении заданий все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно проделаны с необходимыми пояснениями. В конце решений должны быть даны ответы.

Методические указания по решению задач, входящих в РГР, даются для каждой задачи после ее текучести под рубрикой – «Указания».

Содержание расчетно-графической работы

Работа включает по 1-2 задачи по каждому из трех разделов:

Задание 1 – Статика

Задание 2 – Кинематика

Задание 3 – Динамика

Количество задач задается преподавателем.

В каждой задаче дается 10 рисунков и таблица с тем же номером, что и задача, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С.1.4 – это рис. 4 к задаче С.1. Номера условий (варианта) от «0» до «9» указаны в 1-ом столбце таблицы.

Номер рисунка студент выбирает по предпоследней цифре шифра, а номер варианта в таблице – по последней. Например, если шифр оканчивается числом 25, то берут рис. 2, а вариант № 5 из таблицы.

Раздел Статика – задачи С1 и С2

Раздел Кинематика – задачи К2 и К3

Раздел Динамика – задачи Д1 и Д8

Задание 1 – СТАТИКА – задачи C1 и C2

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

СТАТИКА

Задача C1

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. C1.0—C1.9, табл. C1), закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25$ кН. На раму действуют пара сил с моментом $M = 100$ кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действует сила F_2 под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила F_3 под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и т. д.).

Определить реакции связей в точках A, B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,5$ м.

Указания. Задача C1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы F часто удобно разложить ее на составляющие F' и F'' , для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_A(F) = m_A(F') + m_A(F'')$.

14

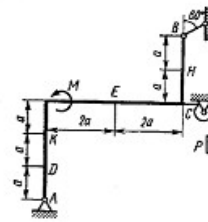


Рис. C1.0

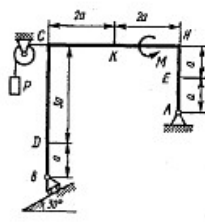


Рис. C1.1

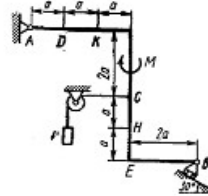


Рис. C1.2

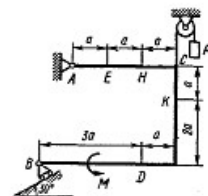


Рис. C1.3

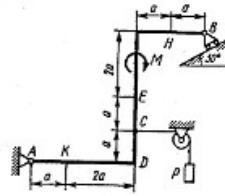


Рис. C1.4

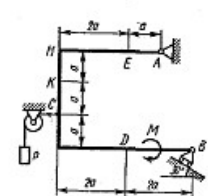


Рис. C1.5

15

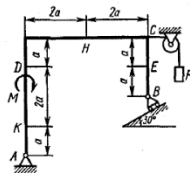


Рис. C1.6

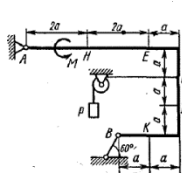


Рис. C1.7

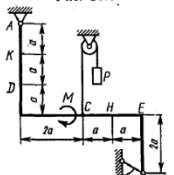


Рис. C1.8

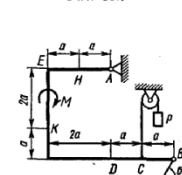


Рис. C1.9

Таблица C1

Силы	F_1		F_2		F_3		F_4	
	Точка приложения	α , град	Точка приложения	α , град	Точка приложения	α , град	Точка приложения	α , град
0	H	30	—	—	—	—	K	60
1	—	—	D	15	E	60	E	30
2	K	75	—	—	—	—	—	—
3	—	—	K	60	H	30	E	60
4	D	30	—	—	—	—	D	75
5	—	—	H	30	—	—	—	—
6	E	60	—	—	K	15	—	—
7	—	—	D	60	—	—	H	15
8	H	60	—	—	D	30	—	—
9	—	—	E	75	K	30	—	—

16

Пример C1. Жесткая пластина ABCD (рис. C1) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F = 25$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75^\circ$, $M = 50$ кН·м, $\beta = 30^\circ$, $a = 0,5$ м. Определить: реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xu и изобразим действующие на пластину силы: силу F , пару сил с моментом M , натяжение троса T (по модулю $T = P$) и реакции связей X_A , Y_A , R_B (реакция неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы F относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу F на составляющие F' , F'' ($F' = F \cos \alpha$, $F'' = F \sin \alpha$) и учтем, что $m_A(F) = m_A(F') + m_A(F'')$. Получим:

$$\sum F_{Kx} = 0, X_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{Ky} = 0, Y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0, M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot 3a - T \sin \gamma \cdot 2a = 0. \quad (3)$$

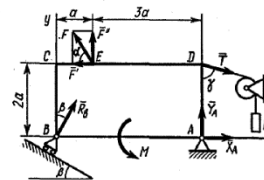


Рис. C1

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8,5$ кН; $Y_A = -23,3$ кН; $R_B = 7,3$ кН. Знаки указывают, что силы X_A и Y_A направлены противоположно показанным на рис. C1.

17

Задача C2

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. C2.0—C2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. C2.6—C2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B или гладкая плоскость (рис. 0 и 1), или невесомый стержень BB' (рис. 2 и 3), или шарнир (рис. 4—9); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. 0, 3, 8), или шарнирная опора на катках (рис. 7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20 \text{ кН/м}$ и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. C2; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила F_2 под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L , сила F_4 под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E , и нагрузка, распределенная на участке CK).

Определить реакции связей в точках A, B, C (для рис. 0, 3, 7, 8 еще и в точке D), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,2 \text{ м}$. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участков указано в табл. C2а.

Указания. Задача C2 — на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленив систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

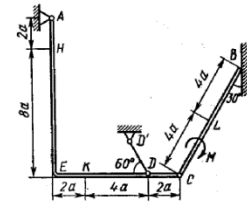


Рис. C2.0

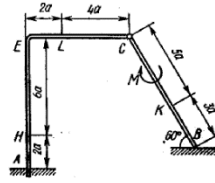


Рис. C2.1

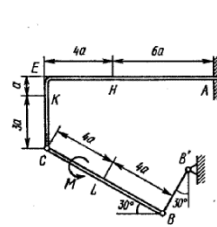


Рис. C2.2

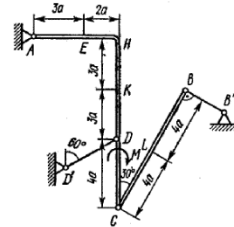


Рис. C2.3

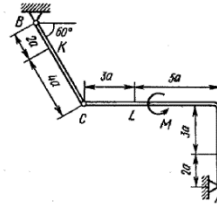


Рис. C2.4

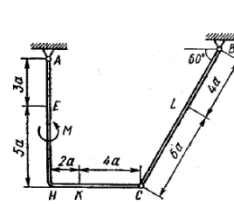


Рис. C2.5

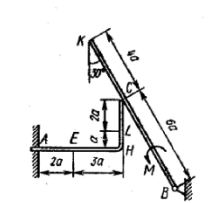


Рис. C2.6

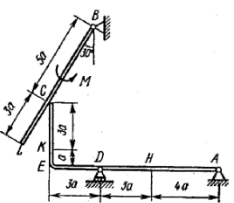


Рис. C2.7

18

19

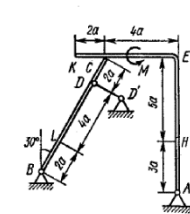


Рис. C2.8

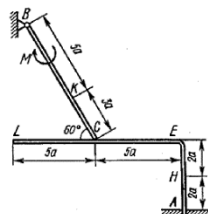


Рис. C2.9

Таблица C2

Номер условия	Сила $\vec{F}_1$		Сила $\vec{F}_2$		Сила $\vec{F}_3$		Сила $\vec{F}_4$		Нагруженный участок
	Точка приложения	$\alpha_1, \text{ град}$	Точка приложения	$\alpha_2, \text{ град}$	Точка приложения	$\alpha_3, \text{ град}$	Точка приложения	$\alpha_4, \text{ град}$	
0	K	60	—	—	H	30	—	—	CL
1	—	—	L	60	—	—	E	30	CK
2	L	15	—	—	K	60	—	—	AE
3	—	—	K	30	—	—	H	60	CL
4	L	30	—	—	E	60	—	—	CK
5	—	—	L	75	—	—	K	30	AE
6	E	60	—	—	K	75	—	—	CL
7	—	—	H	60	L	30	—	—	CK
8	—	—	K	30	—	—	E	15	CL
9	H	30	—	—	—	—	L	60	CK

Таблица C2а

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 0, 3, 5, 7, 8	рис. 1, 2, 4, 6, 9

20

Пример C2. На угольник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис. C2, а). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила F , а к угольнику — равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и пара с моментом M .

Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $a = 0,2 \text{ м}$.
Определить: реакции в точках A, C, D , вызванные заданными нагрузками.

Решение. 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. C2, б). Проведем координатные оси x и y и изобразим действующие на стержень силы: силу F , реакцию N , направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\bar{X}_D$ и $\bar{Y}_D$ реакции шарнира D . Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0, X_D + F - N \sin 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0, Y_D + N \cos 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_D(\vec{F}_i) = 0, N \cdot 2a - F \cdot 5a \sin 60^\circ = 0. \quad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. C2, в). На него действуют сила давления стержня N' , направленная противоположно реакции N , равномерно распределенная нагрузка, которую заменим силой Q , приложенной в середине участка KB (численно $Q = q \cdot 4a = 16 \text{ кН}$), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, состоящая из сил, которую представим составляющими $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, и пары

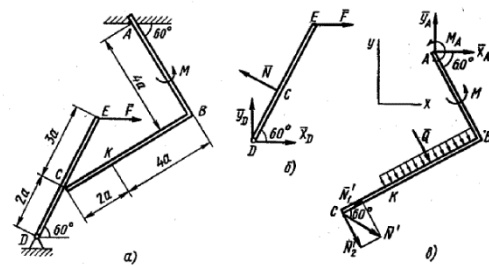


Рис. C2

21

с моментом M_A . Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, X_A + Q \cos 60^\circ + N' \sin 60^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A - Q \sin 60^\circ - N' \cos 60^\circ = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, M_A + M + Q \cdot 2a + N' \cos 60^\circ \cdot 4a + N' \sin 60^\circ \cdot 6a = 0. \quad (6)$$

При вычислении момента силы $\bar{N}'$ разлагаем ее на составляющие $\bar{N}'_1$ и $\bar{N}'_2$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1)–(6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N' = N$ в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: $N = 21,7$ кН, $Y_D = -10,8$ кН; $X_D = 8,8$ кН, $X_A = -26,8$ кН, $Y_A = 24,7$ кН, $M_A = -42,6$ кН·м.

Знаки указывают, что силы $\bar{Y}_D$, $\bar{X}_A$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

Задание 2 – КИНЕМАТИКА – задачи К2 и К3

Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес 1–3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0 – К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 – $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса 2 – $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса 3 – $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки А, В и С.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $s_4(t)$ – закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2, $v_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т. д. (везде φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4 , s_5 и v_5 – вниз.

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (v – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (v_5 – скорость груза 5 и т. д.).

Указания. Задача К2 – на исследование вращательного движения

Таблица К2

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	v_B, v_C	ε_2, a_A, a_5
1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_A, v_C	ε_2, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	v_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	v_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	v_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	v_A, ω_2	ε_2, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_A, a_4

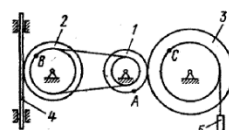


Рис. К2.0

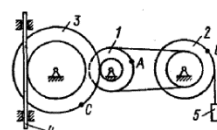


Рис. К2.1

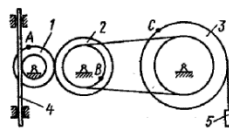


Рис. К2.2

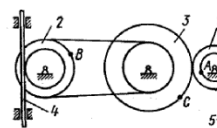


Рис. К2.3

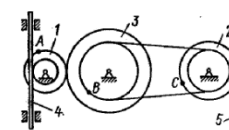


Рис. К2.4

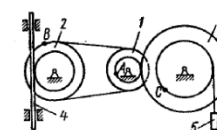


Рис. К2.5

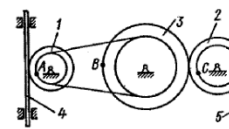


Рис. К2.6

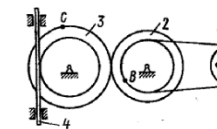


Рис. К2.7

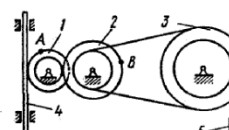


Рис. К2.8

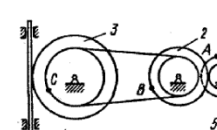


Рис. К2.9

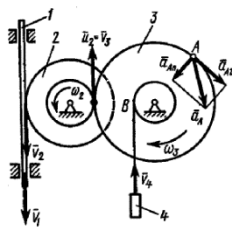


Рис. К2

твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример К2. Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3 , скрепленное с валом радиуса r_3 , находится в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. К2). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.
Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $s_1 = 3t^3$ (s — в сантиметрах, t — в секундах), A — точка обода колеса 3, $t_1 = 3$ с. Определить: $\omega_2, \omega_3, a_2, a_3, a_A$ в момент времени $t = t_1$.

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через v_i , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), — через u_i .

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t . Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \quad (1)$$

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $v_2 = v_1$ или $\omega_2 R_2 = v_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = u_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2} t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{r_3} \omega_2 = \frac{3}{4} t^2. \quad (2)$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим $\omega_2 = 6,75$ с⁻¹.

2. Определяем u_4 . Так как $u_4 = v_4 = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 3$ с $u_4 = 20,25$ см/с.

3. Определяем a_2 . Учитывая второе из равенств (2), получим $a_2 = \dot{\omega}_2 = 3t$. Тогда при $t_1 = 3$ с $a_2 = 4,5$ с⁻².

4. Определяем a_A . Для точки A $\vec{a}_A = \vec{a}_{A_1} + \vec{a}_{A_2}$, где численно $a_{A_1} = R_3 \dot{\omega}_3 = R_3 \dot{\omega}_2$. Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с имеем

$$a_{A_1} = 36 \text{ см/с}^2, \quad a_{A_2} = 364,5 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{A_1}^2 + a_{A_2}^2} = 366,3 \text{ см/с}^2.$$

36

Таблица К36 (к рис. К3.5 — К3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти				
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 , 1/с	v_1 , м/с	u точек	ω звена	a точки	e звена	
0	120	30	30	90	150	2	4	—	—	—	—	AB
1	0	60	90	0	120	—	4	6	B, E	AB	AB	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	—	—	—	—	AB
3	0	150	30	0	60	—	6	8	A, E	AB	AB	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	—	—	—	—	AB
5	90	120	90	90	60	—	8	10	D, E	DE	AB	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	—	—	—	—	AB
7	30	120	30	0	60	—	2	5	A, E	AB	AB	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	—	—	—	—	AB
9	60	60	60	90	30	—	5	4	D, E	AB	AB	AB

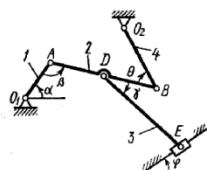


Рис. К3.0

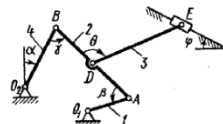


Рис. К3.1

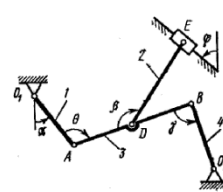


Рис. К3.2

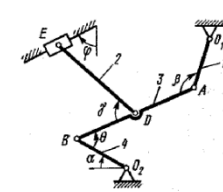


Рис. К3.3

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2.

О т в е т: $\omega_2 = 6,75$ с⁻¹; $v_4 = 20,25$ см/с; $a_2 = 4,5$ с⁻²; $a_A = 366,3$ см/с².

Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B или E (рис. К3.0 — К3.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползунков B и E (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,6$ м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0—4) или в табл. К3б (для рис. 5—9); при этом в табл. К3а ω_1 и ω_4 — величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти». Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против хода часовой стрелки и т. д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α ; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (см. рис. К3б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\vec{v}_B$ и ускорение $\vec{a}_B$ — от точки B к b (на рис. 5—9).

Таблица К3а (к рис. К3.0 — К3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти				
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 , 1/с	v_1 , м/с	u точек	ω звена	a точки	e звена	
0	0	60	30	0	120	6	—	—	—	—	—	AB
1	90	120	150	0	30	—	4	B, E	DE	AB	AB	AB
2	30	60	30	0	120	5	—	A, E	AB	AB	AB	AB
3	60	150	150	90	30	—	5	B, E	DE	AB	AB	AB
4	30	30	60	0	150	4	—	D, E	AB	B	AB	AB
5	90	120	120	90	60	—	6	A, E	AB	B	AB	AB
6	0	60	60	0	30	3	—	B, E	DE	AB	AB	AB
7	0	60	60	0	30	—	2	A, E	DE	AB	AB	AB
8	60	150	120	90	30	2	—	D, E	AB	B	AB	AB
9	30	120	150	0	60	—	8	A, E	DE	A	AB	AB

37

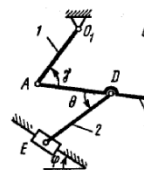


Рис. К3.4

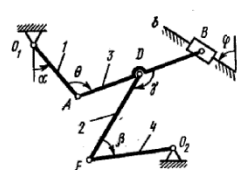


Рис. К3.5

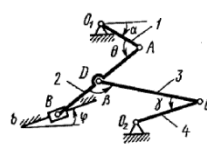


Рис. К3.6

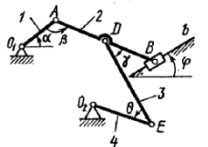


Рис. К3.7

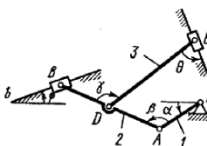


Рис. К3.8

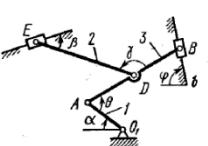


Рис. К3.9

Указания. Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$, где A — точка, ускорение $\vec{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка A движется по дуге окружности, то $\vec{a}_A = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$); B — точка, ускорение $\vec{a}_B$ которой нужно определить (о случае, когда точка B

38

39

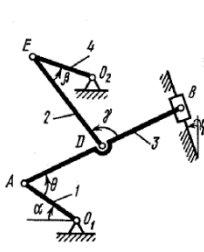


Рис. К3а

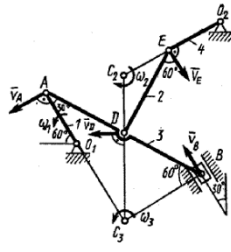


Рис. К3б

тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера К3).

Пример К3. Механизм (рис. К3а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами О1 и О2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $\omega_1 = 2$ с⁻¹, $v_1 = 7$ с⁻² (направления ω_1 и v_1 — против хода часовой стрелки). Определить: v_B , v_E , ω_2 , a_B , a_E .

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем v_B . Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти v_B , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление v_B . По данным задачи, учитывая направление ω_1 , можем определить v_A ; численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \vec{v}_A \perp \vec{AO}_1. \quad (1)$$

Направление $\vec{v}_B$ найдем, учтя, что точка В принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\vec{v}_A$ и направление $\vec{v}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня АВ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая АВ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\vec{v}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \quad \text{и} \quad v_B = 0,46 \text{ м/с}. \quad (2)$$

3. Определяем v_E . Точка Е принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить v_E , надо сначала

40

Вектор $\vec{a}_A^x$ направлен вдоль AO_1 , а $\vec{a}_A^y$ — перпендикулярно AO_1 ; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К3в). Так как точка В одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\vec{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\vec{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и v_B .

Для определения $\vec{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^x + \vec{a}_A^y + \vec{a}_{BA}^x + \vec{a}_{BA}^y. \quad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\vec{a}_{BA}^x$ (вдоль ВА от В к А) и $\vec{a}_{BA}^y$ (в любую сторону перпендикулярно ВА); численно $a_{BA}^x = \omega_1^2 l_2$. Найдя ω_2 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_2 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66 \text{ с}^{-1} \quad \text{и} \quad a_{BA}^x = 0,61 \text{ м/с}^2. \quad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^y ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B , спроектируем обе части равенства (8) на направление ВА (ось х), перпендикулярное неизвестному вектору $\vec{a}_{BA}^y$. Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^x \cos 60^\circ - a_A^y \cos 30^\circ + a_{BA}^x. \quad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0,72 \text{ м/с}^2. \quad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\vec{a}_B$ направлен как показано на рис. К3а.

6. Определяем a_E . Чтобы найти a_E , сначала определим a_{ED}^x . Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное АВ (ось у). Тогда получим

$$-a_E \sin 30^\circ = a_A^x \sin 60^\circ + a_A^y \sin 30^\circ + a_{ED}^x. \quad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{ED}^x = -3,58 \text{ м/с}^2$. Знак указывает, что направление $\vec{a}_{ED}^x$ противоположно показанному на рис. К3в.

Теперь из равенства $\vec{a}_{ED}^y = a_E \sin 30^\circ$ получим

$$a_E = \frac{|a_{ED}^y|}{\sin 30^\circ} = 2,56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $v_B = 0,46$ м/с; $v_E = 0,46$ м/с; $\omega_2 = 0,67$ с⁻¹; $a_B = 0,72$ м/с²; $a_E = 2,56$ с⁻².

Примечание. Если точка В, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К3.0 — К3.4, где В движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\vec{a}_B$ заранее неизвестно.

42

найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню АВ. Для этого, зная $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня АВ; это точка C_3 , лежащая на пересечении перпендикуляров к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, восстановленных из точек А и В (к $\vec{v}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\vec{v}_A$ определяем направление поворота стержня АВ вокруг МЦС C_3 . Вектор $\vec{v}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D , соединяющему точки D и C_3 , и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3 D} = \frac{v_B}{C_3 B}. \quad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B , заметим, что $\triangle AC_3B$ — прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60° , и что $C_3B = AB \sin 30^\circ = 0,5AB = BD$. Тогда $\triangle BC_3D$ является равнобедренным и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0,46 \text{ м/с}; \quad \vec{v}_D \perp \vec{C_3D}. \quad (4)$$

Так как точка Е принадлежит одновременно стержню O_2E , вращающемуся вокруг O_2 , то $\vec{v}_E \perp \vec{O_2E}$. Тогда, вставляя из точек Е и D перпендикуляры к скоростям $\vec{v}_E$ и $\vec{v}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\vec{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2 . Вектор $\vec{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2 E} = \frac{v_D}{C_2 D}, \quad v_E = v_D = 0,46 \text{ м/с}. \quad (5)$$

4. Определяем ω_2 . Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = l_2 / (2 \cos 30^\circ) = 0,69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2 D} = 0,67 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

5. Определяем $\vec{a}_B$ (рис. К3в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти $\vec{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня АВ и траекторию точки В. По данным задачи можем определить $\vec{a}_A = \vec{a}_A^x + \vec{a}_A^y$, где численно

$$a_A^x = \varepsilon_1 l_1 = 2,8 \text{ м/с}^2; \\ a_A^y = \omega_1^2 l_1 = 1,6 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

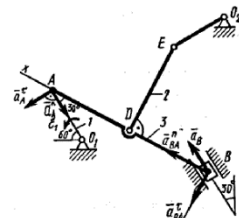


Рис. К3в

41

В этом случае $\vec{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\vec{a}_B = \vec{a}_B^x + \vec{a}_B^y$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\vec{a}_B^x + \vec{a}_B^y = \vec{a}_A^x + \vec{a}_A^y + \vec{a}_{BA}^x + \vec{a}_{BA}^y. \quad (13)$$

При этом вектор $\vec{a}_B^x$ (см., например, рис. К3.0) будет направлен вдоль BO_2 , а вектор $\vec{a}_B^y$ — перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_A^x , a_A^y и a_{BA}^x определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^x = 0$ или $a_A^y = 0$, если точка А движется прямолинейно).

Значение a_B^y также вычисляется по формуле $a_B^y = v_B^2 / \rho = v_B^2 / l$, где l — радиус окружности O_2B , а v_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^x и a_{BA}^y и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a_B^y , можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{(a_B^x)^2 + (a_B^y)^2}$. Величина a_{BA}^y служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

43

ДИНАМИКА

Задача Д1

Груз D массой m , получив в точке A начальную скорость v_0 , движется в изогнутой трубе ABC , расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0 — Д1.9, табл. Д1).

На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\vec{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\vec{R}$, зависящая от скорости v груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f = 0,2$) и переменная сила $\vec{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или

время t_1 движения груза от точки A до точки B , найти закон движения груза на участке BC , т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Указания. Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB , учитывая начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить скорость груза в точке B . Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC . После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B , и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти к переменному x , учитывая, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Таблица Д1

Номер условия	m , кг	v_0 , м/с	Q , Н	R , Н	l , м	t_1 , с	F_x , Н
0	2	20	6	$0,4v$	—	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0,8v^2$	1,5	—	$6t$
2	4,5	24	9	$0,5v$	—	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0,6v^2$	5	—	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0,4v$	—	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0,5v^2$	4	—	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0,3v$	—	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0,8v^2$	2,5	—	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0,5v$	—	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0,2v^2$	4	—	$-6\sin(4t)$

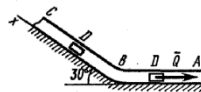


Рис. Д1.0

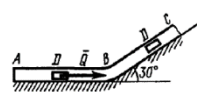


Рис. Д1.1

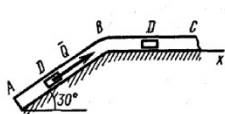


Рис. Д1.2

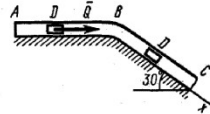


Рис. Д1.3

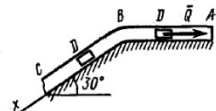


Рис. Д1.4

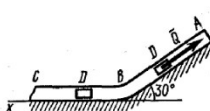


Рис. Д1.5

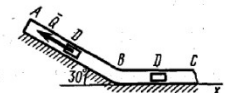


Рис. Д1.6



Рис. Д1.7

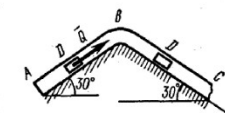


Рис. Д1.8

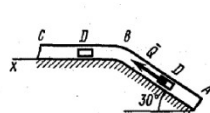


Рис. Д1.9

Пример Д1. На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления R ; расстояние от точки A , где $v = v_0$, до точки B равно l . На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: $m = 2$ кг, $R = \mu v^2$, где $\mu = 0,4$ кг/м, $v_0 = 5$ м/с, $l = 2,5$ м, $F_x = 16\sin(4t)$. Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза на участке BC .

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB , считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\vec{P} = m\vec{g}$ и $\vec{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m \frac{dv_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ или } m v_z \frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \quad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $v_z = v$, получим

$$m v \frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2 \text{ или } v \frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - v^2 \right). \quad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0,2 \text{ м}^{-1}, \quad n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad (3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2v \cdot \frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n). \quad (4)$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2v dv}{v^2 - n} = -2k dz \text{ и } \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1. \quad (5)$$

По начальным условиям при $z = 0$ $v = v_0$, что дает $C_1 = \ln(v_0^2 - n)$ и из равенства (5) находим $\ln(v^2 - n) = -2kz + \ln(v_0^2 - n)$ или $\ln(v^2 - n) - \ln(v_0^2 - n) = -2kz$. Отсюда

$$\ln \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz \text{ и } \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$v^2 = v_0^2 + (v_0^2 - v_0^2)e^{-2kx}. \quad (6)$$

Полагая в равенстве (6) $x = l = 2,5$ м и заменяя k и l их значениями (3), определим скорость v_B груза в точке B ($v_0 = 5$ м/с, число $e = 2,7$):

$$v_B^2 = 50 - 25/e = 40,7 \text{ и } v_B = 6,4 \text{ м/с}. \quad (7)$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC ; найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\vec{P} = mg, \vec{N}, \vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}$. Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx :

$$m \frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{трx} + F_x$$

или

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg \sin \alpha - F_{тр} + F_x, \quad (8)$$

где $F_{тр} = fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось By . Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg \cos \alpha$, откуда $N = mg \cos \alpha$. Следовательно, $F_{тр} = fmg \cos \alpha$; кроме того, $F_x = 16 \sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(4t). \quad (9)$$

Разделив обе части равенства на m , вычислим $g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2$; $16/m = 8$ и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 3,2 + 8 \sin(4t). \quad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$v_x = 3,2t - 2 \cos(4t) + C_2. \quad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B , считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B + 2 \cos 0 = 6,4 + 2 = 8,4.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 2 \cos(4t) + 8,4. \quad (12)$$

54

Отсюда, так как $mg = P$, то

$$F_{тр} = F - M/R - 0,3P = 0,8P - 1,1P - 0,3P = -0,6P. \quad (11)$$

Знак указывает, что сила $\vec{F}_{тр}$ направлена противоположно показанному на рисунке.

Подставляя значения $F_{тр}$ и N из равенств (11) и (10) в неравенство (9), получим $0,6P \leq 1,27Pf$, откуда $f \geq 0,47$. Следовательно, наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение барабана без скольжения $f_{\min} = 0,47$.

Задача Д8

Вертикальный вал AK (рис. Д8.0—Д8.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$, закреплен подшипником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д8 в столбце 2 ($AB = BD = DE = EK = a$). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой $m = 10$ кг, состоящий из частей 1 и 2 (размеры частей стержня показаны на рисунках, где $b = 0,1$ м, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой $m_3 = 3$ кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ даны в столбцах 5—8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подшипника и подшипника. При подсчетах принять $a = 0,6$ м.

Указания. Задача Д8 — на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда

Таблица Д8

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке		α , град	β , град	γ , град	φ , град
		ломаного стержня	невесомого стержня				
1	2	3	4	5	6	7	8
0	B	D	K	45	135	225	60
1	K	B	D	60	240	150	45
2	K	E	B	30	210	120	60
3	D	K	E	60	150	240	30
4	K	D	B	30	120	210	60
5	E	B	K	45	225	135	60
6	E	D	K	60	60	150	30
7	K	B	E	30	30	120	60
8	D	E	K	60	150	60	30
9	E	K	D	30	120	210	60

82

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 1,6t^2 - 0,5 \sin(4t) + 8,4t + C_3. \quad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1,6t^2 + 8,4t - 0,5 \sin(4t), \quad (14)$$

где x — в метрах, t — в секундах.

55

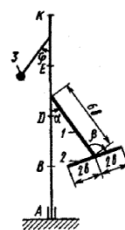


Рис. Д8.0

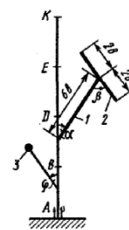


Рис. Д8.1

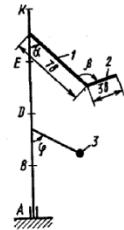


Рис. Д8.2

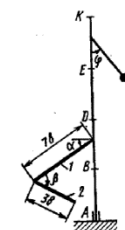


Рис. Д8.3

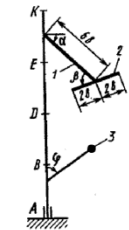


Рис. Д8.4

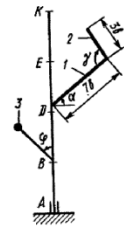


Рис. Д8.5

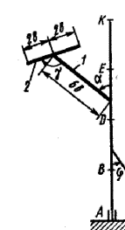


Рис. Д8.6

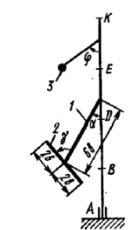


Рис. Д8.7

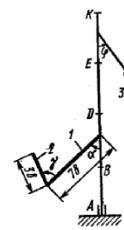


Рис. Д8.8

83

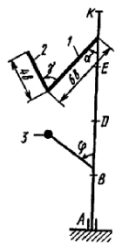


Рис. Д8.9

силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\bar{R}^*$, то численно $R^* = ma_C$, где a_C — ускорение центра масс C тела, но линия действия силы $\bar{R}^*$ в общем случае не проходит через точку C (см. пример Д8).

Пример Д8. Вертикальный вал длиной $3a$ ($AB = BD = DE = a$), закрепленный подшипником A и подшипником D (рис. Д8, а), вращается с постоянной угловой скоростью ω . К валу жестко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из двух частей 1 и 2 , а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

Дано: $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10 \text{ кг}$, $m_3 = 2 \text{ кг}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $a = 0,3 \text{ м}$, $b = 0,1 \text{ м}$. Определить: реакции подшипника A и подшипника D , пренебрегая весом вала.

Решение. 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и E стержни (рис. Д8, б). Массы и веса частей 1 и 2 ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны $m_1 = 0,6m$; $m_2 = 0,4m$;

$$P_1 = 0,6mg; P_2 = 0,4mg; P_3 = m_3g. \quad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем

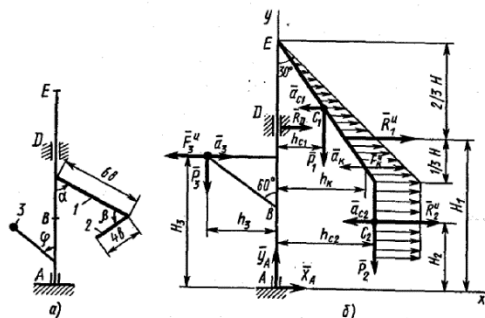


Рис. Д8

(вращающиеся вместе с валом координатные оси Ax так, чтобы стержни лежали в плоскости xz , и изобразим действующие на систему силы: активные силы — силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ и реакции связей — составляющие реакции подшипника $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\bar{R}_D$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\bar{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k — расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\bar{F}_k^*$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k^* = \Delta m_k a_{nk} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k — масса элемента. Так как все F_k^* пропорциональны h_k , то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части 1 треугольник, а для части 2 — прямоугольник (рис. Д8, б).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^* = ma_C$, где m — масса тела, a_C — ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^* = m_1 a_{C1}, R_2^* = m_2 a_{C2}. \quad (2)$$

Сила инерции точечной массы 3 должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна

$$F_3^* = m_3 a_3. \quad (3)$$

Ускорения центров масс частей 1 и 2 стержня и груза 3 равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}, a_{C2} = \omega^2 h_{C2}, a_3 = \omega^2 h_3, \quad (4)$$

где h_{C1} , h_{C2} — расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 — соответствующее расстояние груза:

$$\begin{aligned} h_{C1} &= 3b \sin 30^\circ = 0,15 \text{ м}, \\ h_{C2} &= 6b \sin 30^\circ = 0,3 \text{ м}, \\ h_3 &= l \sin 60^\circ = 5b \sin 60^\circ = 0,43 \text{ м}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив в (2) и (3) значения (4) и учтя (5), получим числовые значения R_1^* , R_2^* и F_3^* :

$$\begin{aligned} R_1^* &= 0,6m\omega^2 h_{C1} = 57,6 \text{ Н}, \\ R_2^* &= 0,4m\omega^2 h_{C2} = 76,8 \text{ Н}, \\ F_3^* &= m_3\omega^2 h_3 = 55,0 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом линии действия равнодействующих $\bar{R}_1^*$ и $\bar{R}_2^*$ пройдут через центры тяжести соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия

действия $\bar{R}_1^*$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника E , где $H = 6b \cos 30^\circ$.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; X_A + R_D + R_1^* + R_2^* - F_3^* = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0; -R_D \cdot 2a - P_1 h_{C1} - P_2 h_{C2} + P_3 h_3 - \\ &\quad - R_1^* H_1 - R_2^* H_2 + F_3^* H_3 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где H_1 , H_2 , H_3 — плечи сил $\bar{R}_1^*$, $\bar{R}_2^*$, $\bar{F}_3^*$ относительно точки A , равные (при подсчетах учтено, что $H = 6b \cos 30^\circ = 0,52 \text{ м}$)

$$\begin{aligned} H_1 &= 3a - (2/3)H = 0,55 \text{ м}, \quad H_2 = 3a - (H + 2b) = 0,18 \text{ м}, \\ H_3 &= a + l \cos 60^\circ = 0,55 \text{ м}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив в уравнения (7) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6), (8) и решив эту систему уравнений (7), найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -33,7 \text{ Н}$; $Y_A = 117,7 \text{ Н}$; $R_D = -45,7 \text{ Н}$.

Основная литература

1. Теоретическая механика. Краткий курс : учебник для вузов / В. Д. Бертяев, Л. А. Булатов, А. Г. Митяев, В. Б. Борисевич. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 168 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-13208-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/587116>.
2. Журавлев, Е. А. Теоретическая механика. Курс лекций : учебник для вузов / Е. А. Журавлев. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 140 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10079-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563433>
3. Чуркин, В. М. Теоретическая механика: геометрическая статика. Решение задач : учебник для вузов / В. М. Чуркин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 227 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05060-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/585338>.

Дополнительная литература

1. Вильке, В. Г. Теоретическая механика : учебник и практикум для вузов / В. Г. Вильке. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 311 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-03481-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/598486>.
2. Лукашевич, Н. К. Теоретическая механика : учебник для вузов / Н. К. Лукашевич. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 266 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02524-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562138>
3. Халилов, В. Р. Теоретическая механика: динамика классических систем : учебник для вузов / В. Р. Халилов, Г. А. Чижов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 344 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09093-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563084>

Периодика

1. 5 колесо : отраслевой журнал. URL: <https://5koleso.ru>. - Текст : электронный.
2. Вестник Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета : Научный рецензируемый журнал. URL: <https://vestnik.sibadi.org/jour/index>. - Текст : электронный.