

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Агафонов Александр Витальевич
Должность: директор филиала
Дата подписания: 18.06.2025 22:52:49
Уникальный программный ключ:
2539477a8ecf706d4c7110c6c11063101

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем
управления**

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала
А.В. Агафонов
« 28 » мая 2021 г.



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ**

«Математические основы ТОЭ»
(наименование дисциплины)

Направление подготовки	13.03.02 «<u>Электроэнергетика и электротехника</u>» (код и наименование направления подготовки)
Направленность подготовки	«<u>Электроснабжение</u>» (наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	Бакалавр
Форма обучения	очная и заочная

Чебоксары, 2021

Методические указания разработаны
в соответствии с требованиями ФГОС ВО

по направлению подготовки

13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

Автор Кульпина Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

(указать ФИО, ученую степень, ученое звание или должность)

Методические рекомендации одобрены на заседании кафедры Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления (протокол № 10 от 10.04.2021 г.).

1. Цель расчетно-графической работы - выявить знания студентов методологических основ ТОЭ, умение применять эти знания в анализе явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов ТОЭ.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь вычислять пределы, находить производные, находить интегралы.

Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Математические основы ТОЭ», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к зачету не допускаются.

2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Титульный лист является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

Во введении содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

В расчетной части обучающийся должен показать умение применять математические методы ТОЭ расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты – до 0,001, а проценты – до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

В заключении расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

3. Требования к оформлению расчетно-графической работы

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы – 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта – 14 пунктов, интервал – 1,5).

2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.

3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.

4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.

5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные подписи.

6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

4. Теоретический материал и примеры решения задач

Матрицы и операции над ними

Сложение (вычитание) матриц одинакового размера производится поэлементно.

$$C=A+B, c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$$

Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A=\lambda B, a_{ij}=\lambda b_{ij}.$$

Умножение матрицы на матрицу определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на $B_{n \times p}$ называется матрица $C_{m \times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием*. Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^t .

Пример. Найти матрицу $C=2A+B^t$, где

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. $C = 2A + B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Определители

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое *определителем*.

Определитель матрицы второго порядка вычисляется по формуле

$$|A| = \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы третьего порядка вычисляется по правилу треугольников или Саррюса

$$|A| = \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы второго порядка вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы : а) по правилу треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

Решение.

А)

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \cdot 4 = 12 - 6 - 10 + 2 + 30 - 12 = 16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} = 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-12) + 4 \cdot 0 = 16.$$

Ранг матрицы

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невыврожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, для которой справедливо равенство $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 5 = 13.$$

1 способ. Находим определитель матрицы A . Значит матрица имеет обратную.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{i} & 5 & 2 & 4 & \tilde{H} & \textcolor{red}{i} \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{i} & 0 & -1 & 13 & \tilde{H} & \textcolor{red}{i} \\ 0 & -1 & 15 & -7 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{i} & 0 & -1 & 13 & \tilde{H} & \textcolor{red}{i} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ \textcolor{red}{i} & 0 & -2 & 0 & \tilde{H} & \textcolor{red}{i} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 16 & 28 & -24 \\ \textcolor{red}{i} & 0 & -2 & 0 & \tilde{H} & \textcolor{red}{i} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \textcolor{red}{i}$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

2 способ. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Подставим найденные значения дополнений и определителя в формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} -коэффициенты при неизвестных, b_m - свободные члены.

Основными методами решения СЛАУ являются метод Гаусса, матричный метод и правило Крамера. Метод Гаусса применим для решения любой СЛАУ, в то время как метод Крамера и матричный метод могут быть использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей.

Для решения *методом Гаусса* составляют расширенную матрицу системы, которую затем с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных.

Решение системы *матричным методом* или *методом обратной матрицы* определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B$$

По формулам Крамера :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ - определитель системы, Δ_j - определители, полученные из определителя системы заменой j -го столбца на столбец свободных членов.

Пример. Решить СЛАУ: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение. А) Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

- столбец неизвестных,

- столбец свободных членов.

Определитель системы $\Delta = -7 \neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

По формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

В) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & -1 & | & -4 \\ 0 & 5 & 4 & | & 9 \end{pmatrix}$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 7 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_2 - x_3 = -4 \\ 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем $x_3 = \frac{7}{7} = 1$, из второго уравнения

$$x_2 = \frac{4 - x_3}{3} = \frac{4 - 1}{3} = 1, \text{ и из первого } x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1.$$

Векторная алгебра

Операции над векторами

Скалярное произведение векторов

Вектором называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *линейно-независимыми*, если $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. В противном случае, они линейно-зависимы.

Длиной (модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина $\vec{a}(x, y)$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Векторы называются *коллинеарными*, если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

1) сложение: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

2) умножение на число $\lambda \vec{a} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Углы наклона $\vec{a}$ к осям координат называются *направляющими косинусами*.

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \phi$$

где ϕ - угол наклона вектора $\vec{a}$ к оси l .

Скалярным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi$$

В координатной форме

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Угол между векторами $\vec{a}, \vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Пример. Найти длину $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и разложить его по $\vec{a}, \vec{b}$, если

$$\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (1, -2), \vec{c} = (-1, 1)$$

Решение. Найдем координаты $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 $= (3, -1) + (1, -2) + (-1, 1) = (3, -2)$

Длина вектора $\vec{d} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Разложить по $\vec{a}, \vec{b}$ - значит, представить в виде $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. Для определения α, β , запишем в виде

$$\alpha \cdot (3, -1) + \beta \cdot (1, -2) = (3, -2)$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 \\ -\alpha - 2\beta = -2 \end{cases}$$

Решив систему, получим $\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{3}{5}$, то есть $\vec{d} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если

$$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \phi = \frac{\pi}{3}$$

Решение.
$$\cos \phi = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2}} =$$

$$= \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{13}}.$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \phi.$$

В координатной форме

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения.

Пример. Найти вектор $\vec{d}$, ортогональный $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-7, 0, 2)$, для которого скалярное произведение с $\vec{c} = (1, 1, 1)$ равно 3.

Решение. Искомый вектор коллинеарен $\vec{a} \times \vec{b}$. Следовательно, он равен $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда $\vec{d} = (4\lambda, -23\lambda, 14\lambda)$.

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = 4\lambda \cdot 1 - 23\lambda \cdot 1 + 14\lambda \cdot 1 = -5\lambda = 3, \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \vec{d} = \left(-\frac{12}{5}, \frac{69}{5}, -\frac{42}{5}\right).$$

5. Задания расчётно-графической работы.

Задание 1. Даны матрицы A и B . Найдите матрицу C .

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ i & i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ i & i & i \end{pmatrix}$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ i & i \end{pmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ i & i \end{pmatrix}$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 \\ i & i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ i & i & i \end{pmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ i & i \end{pmatrix}$$

Задание2. Найдите произведение матриц $A \cdot B$ или значение матричного многочлена. Существует ли произведение $B \cdot A$?

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ i & i \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i & i \end{pmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ i & i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ i & i & i \end{pmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 34 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad f(x) = 2x^2 - 5x + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad f(x) = 3x^2 + 2x - 5,$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad f(x) = x^3 - 7x^2 + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad f(x) = 12x^2 + 5x + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Вычислить определитель.

$$1. \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. .

Задание 4. Найдите обратную матрицу для матрицы A . Сделайте проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

2. .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3. .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

7. .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 20 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

10.

Задание 5. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

$$1. \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+3y+4z=3 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \end{cases}$$

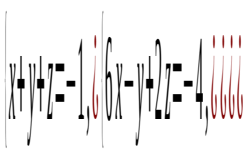
$$4. \begin{cases} x+3y-z=4 \\ -x+2y+3z=12 \end{cases}$$

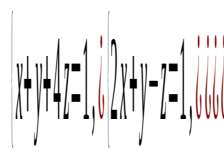
$$5. \begin{cases} 5x-y+z=-17 \\ x-3y+2z=11 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x-y-z=3 \\ x+3y+3z=-4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x-y+z=16 \\ 2x-3y+2z=11 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x-y-z=-3 \\ x+2y+3z=-4 \end{cases}$$

9. 

10. 

Задание 6. Найти линейную комбинацию векторов.

1. $3\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$, где $\vec{a} = (4, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$, $\vec{c} = (10, 8, 1)$.

2. $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$, где $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -2)$.

3. $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 3(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a} = (4, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$, $\vec{c} = (10, 8, 1)$.

4. $4\vec{a} + 19\{\vec{b} - \vec{c}\}$, где $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\vec{b} = (10, -5, -2)$, $\vec{c} = (187, 8, 1)$.

5. $18\{\vec{a} + 3\vec{b} + 7\vec{c}\}$, где $\vec{a} = (-6, 2, 0)$, $\vec{b} = (54, 1, 1)$, $\vec{c} = (-90, 1, -2)$.

6. $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 13(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a} = (45, -9, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$, $\vec{c} = (131, 9, 1)$.

7. $13\{\vec{a} + 6\vec{b} - \vec{c}\}$, где $\vec{a} = (-10, 1, 9)$, $\vec{b} = (1, 7, -2)$, $\vec{c} = (10, 5, 1)$.

8. $-5\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}$, где $\vec{a} = (-7, 2, 0)$, $\vec{b} = (-5, 1, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -2)$.

9. $2(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 7(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a} = (4, -8, 3)$, $\vec{b} = (90, 2, -2)$, $\vec{c} = (10, 8, 1)$.

10. $14\{\vec{a} + 19\{\vec{b} - \vec{c}\}\}$, где $\vec{a} = (-4, -4, 3)$, $\vec{b} = (113, -5, -2)$, $\vec{c} = (17, 3, 1)$.

Задание 7. Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1. $\vec{a} = (0, 4, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 2)$.

2. $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (0, -2, -3)$.

3. $\vec{a} = (4, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

4. $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$.

5. $\vec{a} = (4, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

6. $\vec{a}=(1, 4, -7), \vec{b}=(-1, 2, 2)$.

7. $\vec{a}=(10, 1, -5), \vec{b}=(3, -2, -3)$.

8. $\vec{a}=(-14, 11, 3), \vec{b}=(3, 2, -2)$.

9. $\vec{a}=(13, 2, 0), \vec{b}=(24, 1, 1)$.

10. $\vec{a}=(51, 1, -3), \vec{b}=(1, 2, -2)$.

Задание8.

1. Даны точки $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2)$. Найти модуль и направление вектора $\vec{AB}$

2. Найти $|2\vec{a}+3\vec{b}|$, если $\vec{a}=(1.5, 0, -4), \vec{b}=(0, 0, 4)$.

3. При каком значении n векторы $\vec{a}=(3, -2, 1)$ и $\vec{b}=(n, 4, 0.5)$ ортогональны?

4. Найти $(\vec{c}, \vec{d})$, если $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}, \vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}, |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 120° .

5. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}, |\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60° .

6. Вычислить $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $|\vec{a}|=2\sqrt{2}, |\vec{b}|=4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135° .

7. Найти внешний угол B в треугольнике ABC , если $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2), C(2, -3, 1)$.

8. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=6$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60° .

9. Найти $\vec{c}=2\vec{a}, \vec{d}=\vec{b}-\vec{a}, |\vec{c}|, |\vec{d}|, \vec{d}^2, (\vec{c}, \vec{d})$, угол между векторами $\vec{c}, \vec{d}$, если $\vec{a}=(2, -1, -2), \vec{b}=(8, -4, 0)$.

10. Построить параллелограмм на векторах $OA=(1, 1, 0), OB=(0, -3, 1)$. Определить диагонали и их длины.

Задание 9.

1. Вычислить $[\vec{c}, \vec{d}]$, если

$$\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}, \vec{d}=-2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}=(-1, 0, 3), \vec{b}=(1, 1, 2).$$

2. Найти $\|\vec{c}, \vec{d}\|$, если $\vec{c}=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{d}=-\vec{a}+3\vec{b}, |\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 30° .

3. Вычислить площадь треугольника ABC , если $A(2, -2, 3), B(-3, -6, 0), C(4, -3, -1)$.

4. Лежат ли точки $A(2, -1, -3), B(-4, 1, -2), C(0, -6, 3), D(-12, -2, 5)$ в одной плоскости?

5. Лежат ли точки $A(1, -2, 3), B(0, 1, 0), C(1, 2, -1), D(4, -1, 7)$ в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=(2, -2, 6), \vec{b}=(-6, 6, 3)$,
 $\vec{c}=(3, -2, 5)$.

7. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP , площади граней тетраэдра, если $A(1, -3, -5), B(-1, 2, -4), C(0, 0, -2), D(-6, -1, -2)$.

8. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP , медианы граней, площади граней тетраэдра, если $A(2, -1, 2), B(5, 5, 5), C(3, 2, 0), D(4, 1, 4)$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, длины диагоналей параллелограмма, угол между $\vec{a}$ и $\vec{p}$, и проекцию $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{c} = 6\vec{a} + 10\vec{b}, \vec{d} = 3\vec{a} - 6\vec{b}, \vec{f} = 3\vec{a} - 6\vec{b}, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \angle$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135° .

Задание 10.

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины A , и медианы, проведенной из вершины B , треугольника ABC , если $A(-1, -5), B(3, -1), C(1, -2)$.

2. Написать уравнение стороны квадрата $ABCD$, если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1, -1), B(-3, 3)$.

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(8, 6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки $A(5, 4)$ до прямой, проходящей через точки $B(1, -2), C(0, 3)$.

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(1, 4)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $-2x + 5y - 2 = 0$.

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(-1, 5)$ и точку пересечения прямых $5x + 3y - 1 = 0$ и $4x + 5y + 7 = 0$.
7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 1, 2)$, перпендикулярно вектору $\overline{AB}$, если $B(-1, 2, 3)$.
8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1, 2, -3)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $4x + y - 2z + 2 = 0$.
9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, -1, 3)$ и отсекающей на координатных осях равные отрезки.
10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ и $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

6. Шкала оценивания

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«Отлично»	обучающийся ясно изложил условия задач, решения обосновал
«Хорошо»	обучающийся ясно изложил условия задач, но в обосновании решений имеются сомнения;
«Удовлетворительно»	обучающийся изложил решение задач, но в решении есть ошибки;
«Неудовлетворительно»	обучающийся не уяснил условия задач, решения не обосновал, либо не сдал работу на проверку.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

1. Малинин, Л. И. Теория электрических цепей : учебное пособие для вузов / Л. И. Малинин, В. Ю. Нейман. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 345 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-04319-8. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/489941>
2. Теоретические основы электротехники : учебник / И. Я. Лизан, К. Н. Маренич, И. В. Ковалева [и др.]. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. – 627 с. : ил. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=618546>. – ISBN 978-5-9729-0663-5. – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Теоретические основы электротехники. Сборник задач : учебное пособие для вузов / Л. А. Бессонов [и др.] ; ответственный редактор Л. А. Бессонов. – 5-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 528 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-3486-1. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/467025> .
2. Миленина, С. А. Электротехника : учебник и практикум для вузов / С. А. Миленина, Н. К. Миленин ; под редакцией Н. К. Миленина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 263 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-05077-6. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/492090>.

Периодика

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки / гл. ред. Кривчик В.Д. — Пенза, 2021. — URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/314991>. — Текст : электронный

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем
управления**

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТОЭ»

Выполнил: студент __ курса
заочного отделения
по направлению 13.03.02
Электроэнергетика и
электротехника

Ф.И.О.

Научный руководитель:

должность, звание

Ф.И.О.

Оценка _____

Дата «__» _____ 2021г.

Чебоксары 2021