

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Агафонов Александр Викторович
Должность: директор филиала
Дата подписания: 04.07.2026 14:08:18
Уникальный программный ключ:
2539477a8acf706dc9c9ff164bca111eb6d3c4ab06

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

**Кафедра информационных технологий,
электроэнергетики и систем управления**



**Методические рекомендации по подготовке и
защите расчетно-графической работы по
дисциплине**

Математика

	(наименование дисциплины)
Специальность	23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства
	(код и наименование направления подготовки)
Специализация	«Автомобили и тракторы»
	(наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	инженер
Форма обучения	очная, заочная

Чебоксары, 2022

Методические указания разработаны в соответствии с:

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с:

Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – специалитет по специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации №935 от 11 августа 2020 года, зарегистрированный в Минюсте 25 августа 2020 года, рег. номер 59433

- учебным планом (очной, заочной форм обучения) по специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства;
- рабочей программой дисциплины «Математика».

Автор Кульпина Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

Методические указания одобрены на заседании кафедры информационных технологий, электроэнергетики и систем управления (протокол № 11 от 14.05.2022 г)

В Методических рекомендациях изложены методология и методика подготовки расчетно-графических работ, а также требования к их оформлению; кроме того, определены основные обязанности кафедры транспортно-энергетических систем и научных руководителей по руководству, даны рекомендации студентам по их защите.

Методические рекомендации предназначены для руководителей расчетно-графических работ, а также для студентов всех форм обучения обучающихся по направлению по специальности 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства в Чебоксарском институте (филиале) Московского политехнического университета.

1. Порядок выбора и утверждения темы расчетно-графической работы

Тема расчетно-графической работы определяется студентом совместно с преподавателем на основании перечня направлений научно-исследовательской деятельности, ежегодно утверждаемых кафедрами, и затем формулируется им в первоначальной редакции.

2. Структура и содержание расчетно-графической работы

Расчетно-графическая работа должен отвечать следующим требованиям к структуре:

- введение;
- основная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Во введении обсуждается постановка задачи, выбор и обоснование начальных условий. В основной части приводятся все произведенные расчеты. В заключении анализируются и обсуждаются полученные результаты.

Цель расчетно-графической работы: выбрать материал резервуара, рассчитать нагрузки, действующие на резервуар, выбрать оптимальные размеры, выполнить расчет на прочность, устойчивость и опрокидывание резервуара, расчет и конструирование днища и покрытия резервуара.

3. Порядок оформления расчетно-графической работы

Расчетно-графическая работа выполняется на компьютере на стандартных листах А4. Текст печатается на одной стороне листа. На странице должно **располагаться 28-30 строк, каждая из которых содержит 60-65 знаков, включая пробелы. Междустрочный интервал – 1,5, шрифт текста – 14 (Times New Roman), в таблицах - 12, в подстрочных сносках -10.** Текст печатается строчными буквами (кроме заглавных), выравнивается по ширине с использованием переносов слов. На титульном листе надпись: расчетно-графическая работа печатается 18 шрифтом. Подчеркивание слов и выделение их курсивом внутри самой работы не допускается. Однако заголовки и подзаголовки при печатании текста письменной работы выделяются полужирным шрифтом. Абзацный отступ должен **соответствовать 1,25 см** и быть одинаковым по всей работе.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы составляет **25-35 страниц**. В данный объем не входят приложения и список использованных источников. По согласованию с преподавателем объем работы может быть увеличен.

Страницы, на которых излагается текст, должны иметь поля: **левое -30 мм, правое - 10 мм, верхнее - 20 мм, нижнее - 20 мм.**

В тексте работы «Введение», название глав, «Заключение» и «Список использованной литературы» печатаются (начинаются) с новой страницы.

Расстояние между заголовком и подзаголовком, заголовком и последующим текстом, подзаголовком и предыдущим текстом отделяют двумя полуторными межстрочными интервалами, а между подзаголовком и последующим текстом - одним полуторным межстрочным интервалом.

Главы письменных работ нумеруются арабскими цифрами и должны начинаться с новой страницы (листа). Номер главы состоит из числа: 1, 2 и т.д.

Заголовки (подзаголовки) располагаются центрированным (посередине текста) способом.

Страницы письменных работ должны иметь сквозную нумерацию арабскими цифрами по всему тексту. Номер страницы проставляют в внизу поля страницы по центру без точки в конце. Первой страницей письменной работы является титульный лист. Он не нумеруется. В работе второй страницей является содержание.

Титульный лист должен содержать наименование учебного заведения, формы обучения, обозначение характера работы (курсовая), ее тему, фамилию, имя, отчество выполнившего ее студента, номер курса и группы, ученую степень, должность или ученое звание научного руководителя, его фамилию и инициалы, графы «Дата сдачи», «Допустить к защите», «Дата защиты», «Оценка», место и год написания работы.

Оглавление работы, которое следует после титульного листа, должно содержать названия элементов структуры работы и номера листов, с которых они начинаются.

При использовании литературы и цитировании отдельных научных положений студент обязан осуществлять в сносках ссылки на авторов и источники, откуда он заимствует материал (фамилия и инициалы автора, название работы, место и год издания, конкретная страница, откуда заимствована цитата). При этом цитирование допускается только в ограниченном объеме, оправданном целью цитирования (для обоснования актуальности рассматриваемого вопроса; демонстрации различных взглядов, существующих в науке по проблемам темы, подтверждения или опровержения выдвигаемых студентом тезисов и т.п.).

Прямое цитирование в тексте обязательно оформляется с помощью кавычек. В случае буквального воспроизведения положений научных трудов без указания на их названия и авторов расчетно-графическая работа к защите не допускается.

В списке использованных источников должны быть указаны только те материалы, на которые имеется ссылка (сноска) в работе.

Если в курсовой работе имеются приложения, их необходимо пронумеровать. Все листы расчетно-графической работы должны быть пронумерованы.

Нумерация страниц в курсовой работе должна быть сплошной. Студент отвечает за грамотность и аккуратность оформления расчетно-графической работы.

Наличие грамматических, орфографических и пунктуационных ошибок либо небрежное оформление работы может послужить причиной неудовлетворительной оценки работы.

4. Порядок представления расчетно-графической работы на защиту

Расчетно-графическая работа, подготовленный студентом в окончательной форме, должна быть представлена делопроизводителю кафедры в следующем комплекте:

в письменной форме в прошитом, сброшюрованном или скрепленном виде – 1 экземпляр;

в электронной форме посредством направления на электронный почтовый адрес кафедры транспортно-энергетических систем ttm@chebpolytech.ru – 1 экземпляр.

Делопроизводитель кафедры после регистрации факта и даты сдачи расчетно-графической работы передает ее для проверки научным руководителем.

Передача расчетно-графической работы в электронной форме может быть осуществлена путем направления ее студентом непосредственно научному руководителю по электронной почте.

После поступления расчетно-графической работы на кафедру научный руководитель проверяет ее в течение 14 календарных дней с момента поступления на кафедру, после чего возвращает ее делопроизводителю со своим отзывом. В отзыве указываются следующие положения:

- наименование учебного заведения, кафедры, формы обучения;
- обозначение характера работы (курсовая), ее тему;
- фамилию, имя, отчество выполнившего ее студента, номер курса и группы;
- ученую степень, должность или ученое звание научного руководителя, его фамилию и инициалы;
- соответствие представленной расчетно-графической работы общим требованиям, указанным в настоящих Методических указаниях;
- указание на имеющиеся в курсовой работе недостатки (как по форме, так и по содержанию работы), не препятствующие допуску работы к защите;
- вывод о возможности допуска расчетно-графической работы к защите.

В случае если поставленные научным руководителем вопросы не ясны студенту, он вправе уточнить их у научного руководителя лично во время его

еженедельных консультаций (дежурств на кафедре) или дистанционно через электронную почту.

В случае формулирования научным руководителем вывода о невозможности допуска расчетно-графической работы к защите расчетно-графическая работа подлежит подготовке заново с учетом замечаний, указанных научным руководителем, и повторному представлению на защиту в порядке, предусмотренном разделами 3-5, тому же научному руководителю.

5. Порядок защиты расчетно-графической работы

Защита расчетно-графической работы может проводиться только научному руководителю.

Защита расчетно-графической работы проводится в форме, установленной научным руководителем. При устной форме защиты расчетно-графической работы студент должен подготовить ответы на вопросы, поставленные ему научным руководителем в рецензии.

Научный руководитель вправе по своему усмотрению задавать студенту дополнительные вопросы для проверки уровня и качества освоения им знаний по теме расчетно-графической работы, а также для дополнительной проверки самостоятельности выполнения расчетно-графической работы.

По итогам защиты научный руководитель определяет, может ли быть защита зачтена, или требуется повторная защита.

По итогам первоначальной или (в случае ее неудачи) повторной защиты расчетно-графической работы научный руководитель ставит отметку о защите расчетно-графической работы в зачетной книжке студента, в ведомости и на титульном листе работы.

После защиты рецензия и расчетно-графическая работа подлежат сканированию самим студентом и заливке в Электронную информационно-образовательную среду (Электронное портфолио) Чебоксарского института (филиала) Московского политехнического университета по адресу <http://students.polytech21.ru/login.php>, после чего работа в письменной форме передаются студентом делопроизводителю для хранения в архиве Филиала.

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО- ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Основная литература

1. *Шипачев, В. С.* Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 248 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07889-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/584495>
2. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 305 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07891-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/537838>.
3. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями : учебник для вузов / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 755 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-16210-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/599027>

Дополнительная литература

1. Бугров, Я. С. Высшая математика. Задачник : учебное пособие для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 192 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-7568-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536744>.
2. Математика для экономистов. Практикум : учебное пособие для вузов / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 285 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8868-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536181>.
3. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями : учебное пособие для вузов / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 755 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-16210-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/544898>.

Периодика:

1. Нефтегазовая промышленность: отраслевой журнал.
<https://nprom.online>. - Текст: электронный.
2. Бурение и нефть: научно-технический рецензируемый журнал.
<https://burneft.ru/ethics>. - Текст: электронный.

Приложение

1. Теоретический материал и примеры решения задач

Матрицы и операции над ними

Сложение (вычитание) матриц одинакового размера производится поэлементно.

$$C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A = \lambda B, a_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

Умножение матрицы на матрицу определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на $B_{n \times p}$ называется матрица $C_{m \times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием*. Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^t .

Пример. Найти матрицу $C = 2A + B^t$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. $C = 2A + B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Определители

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое *определителем*.

Определитель матрицы второго порядка вычисляется по формуле

$$|A| = \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы третьего порядка вычисляется по правилу треугольников или Саррюса

$$|A| = \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы второго порядка вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы : а) по правилу треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

Решение.

а)

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \cdot 4 = 12 - 6 - 10 + 2 + 30 - 12 = 16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-12) + 4 \cdot 0 = 16.$$

Ранг матрицы

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, для которой справедливо равенство $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 5 = 8 + 5 = 13.$$

1 способ. Находим определитель матрицы
матрица имеет обратную.

Значит

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{i} & 5 & 2 & 4 & \textcolor{red}{i} & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{i} & 0 & -1 & 13 & \textcolor{red}{i} & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & & & -7 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{i} & 0 & -1 & 13 & \textcolor{red}{i} & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ \textcolor{red}{i} & 0 & -2 & 0 & \textcolor{red}{i} & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & & & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 16 & 28 & -24 \\ \textcolor{red}{i} & 0 & -2 & 0 & \textcolor{red}{i} & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & & & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

2 способ. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - (-4) = 2 \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1) - (-4) = -1 \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - (-2) = -3 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) - (-2) = 1 \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-2) = 4 \\ A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) - 2 = 0 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-2) = 1 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) - 2 = 0 \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 \end{aligned}$$

Подставим найденные значения дополнений и определителя в формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

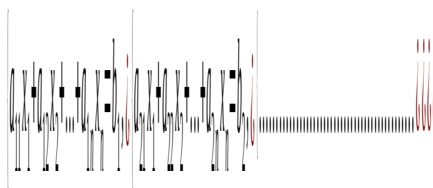
Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет

вид



где a_{ij} -коэффициенты при неизвестных, b_m - свободные члены.

Основными методами решения СЛАУ являются метод Гаусса, матричный метод и правило Крамера. Метод Гаусса применим для решения любой СЛАУ, в то время как метод Крамера и матричный метод могут быть использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей.

Для решения *методом Гаусса* составляют расширенную матрицу системы, которую затем с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных.

Решение системы *матричным методом* или *методом обратной матрицы* определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

По формулам Крамера :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ - определитель системы, Δ_j - определители, полученные из определителя системы заменой j -го столбца на столбец свободных членов.

Пример. Решить СЛАУ: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. а) Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- столбец неизвестных, - столбец свободных членов.

Определитель системы $\Delta = -7 \neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

По формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

в) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array} \right)$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_2 - x_3 = -4 \\ 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем $x_3 = \frac{7}{7} = 1$, из второго уравнения $x_2 = \frac{4 - x_3}{3} = \frac{4 - 1}{3} = 1$, и из первого $x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1$.

Векторная алгебра

Операции над векторами

Скалярное произведение векторов

Вектором называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *линейно-независимыми*, если $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В противном случае, они линейно-зависимы.

Длиной (модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина $\vec{a}(x, y)$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Векторы называются *коллинеарными*, если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

- 1) сложение: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;
- 2) умножение на число $\lambda \vec{a} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Углы наклона $\vec{a}$ к осям координат называются *направляющими косинусами*.

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \phi,$$

где ϕ - угол наклона вектора $\vec{a}$ к оси l .

Скалярным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi.$$

В координатной форме

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Угол между векторами $\vec{a}, \vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Пример. Найти длину $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и разложить его по $\vec{a}, \vec{b}$, если

$$\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (1, -2), \vec{c} = (-1, 1).$$

Решение. Найдем координаты $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3, -1) + (1, -2) + (-1, 1) = (3, -2)$.

$$\text{Длина вектора } \vec{d} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Разложить по $\vec{a}, \vec{b}$ - значит, представить в виде $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. Для определения α, β , запишем в виде

$$\alpha \cdot (3, -1) + \beta \cdot (1, -2) = (3, -2)$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = -2 \end{cases}$$

Решив систему, получим $\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{3}{5}$, то есть $\vec{d} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \phi = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

$$\cos \phi = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2}} =$$

$$= \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{13}}.$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \phi.$$

В координатной форме

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения.

Пример. Найти вектор $\vec{d}$, ортогональный $\vec{a}=(1, 2, 3), \vec{b}=(-7, 0, 2)$, для которого скалярное произведение с $\vec{c}=(1, 1, 1)$ равно 3.

Решение. Искомый вектор коллинеарен $\vec{a} \times \vec{b}$. Следовательно, он равен $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Тогда $\vec{d} = (4\lambda, -23\lambda, 14\lambda)$.

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = 4\lambda \cdot 1 - 23\lambda \cdot 1 + 14\lambda \cdot 1 = -5\lambda = 3, \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \vec{d} = \left(-\frac{12}{5}, \frac{69}{5}, -\frac{42}{5}\right)$$

2. Задания расчётно-графической работы №1.

Задание 1. Даны матрицы A и B . Найдите матрицу C .

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Задание2. Найдите произведение матриц $A \cdot B$ или значение матричного многочлена. Существует ли произведение $B \cdot A$?

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 34 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad f(x) = 2x^2 - 5x + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad f(x) = 3x^2 + 2x - 5,$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad f(x) = x^3 - 7x^2 + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$9. f(x) = 12x^2 + 5x + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Вычислить определитель.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9. \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 4. Найдите обратную матрицу для матрицы A . Сделайте проверку.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c|c} 1 & 2 & 0 \\ \hline 4 & 5 & 1 \end{array} \begin{array}{c} i \\ i \\ i \end{array}$$

3. .

$$A = \begin{array}{c|c} 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} i \\ i \\ i \end{array}$$

4. .

$$A = \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} i \\ i \\ i \end{array}$$

5. .

$$A = \begin{array}{c|c} 5 & 3 & -6 \\ \hline 2 & -1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} i \\ i \\ i \end{array}$$

6. .

$$A = \begin{array}{c|c} 1 & 3 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 3 \end{array} \begin{array}{c} i \\ i \\ i \end{array}$$

7. .

$$A = \begin{array}{c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \begin{array}{c} i \\ i \\ i \\ i \end{array}$$

8. .

$$A = \begin{array}{c|c} 8 & 3 & -8 \\ \hline 20 & -1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} i \\ i \\ i \end{array}$$

9. .

$$A = \begin{array}{c|c} 13 & 3 & -1 \\ \hline 2 & -12 & 8 \end{array} \begin{array}{c} i \\ i \\ i \end{array}$$

10. .

Задание5. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

1.
$$\begin{cases} x+y+2z=1, \\ 2x-y+2z=-4, \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x+3y+4z=3, \\ 2x-y-z=1, \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-5y+3z=-1, \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x+3y-z=4, \\ -x+2y+3z=12, \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 5x-y+z=-17, \\ x-3y+2z=-11, \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 4x-y-z=-3, \\ x+3y+3z=-4, \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 3x-y+z=-16, \\ 2x-3y+2z=-11, \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x-y-z=-3, \\ x+2y+3z=-4, \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 6x-y+2z=-4, \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x+y+4z=1, \\ 2x+y-z=1, \end{cases}$$

Задание6. Найти линейную комбинацию векторов.

1. $3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(4, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$, $\vec{c}=(10, 8, 1)$.

2. $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(1, 2, 0)$, $\vec{b}=(2, 1, 1)$, $\vec{c}=(-1, 1, -2)$.

3. $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}+3(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$, $\vec{c}=(10, 8, 1)$.

4. $4\vec{a}+19\{\vec{b}-\vec{c}\}$, где $\vec{a}=(2, -4, 3)$, $\vec{b}=(10, -5, -2)$, $\vec{c}=(187, 8, 1)$.

5. $18\{\vec{a}+3\vec{b}+7\vec{c}\}$, где $\vec{a}=(-6, 2, 0)$, $\vec{b}=(54, 1, 1)$, $\vec{c}=(-90, 1, -2)$.

6. $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}+13(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(45, -9, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$, $\vec{c}=(131, 9, 1)$.

7. $13\{\vec{a}+6\vec{b}-\vec{c}\}$, где $\vec{a}=(-10, 1, 9)$, $\vec{b}=(1, 7, -2)$, $\vec{c}=(10, 5, 1)$.

8. $-5\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(-7, 2, 0)$, $\vec{b}=(-5, 1, 1)$, $\vec{c}=(-1, 1, -2)$.

9. $2(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}+7(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4, -8, 3)$, $\vec{b}=(90, 2, -2)$, $\vec{c}=(10, 8, 1)$.

10. $14\{\vec{a}+19\{\vec{b}-\vec{c}\}\}$, где $\vec{a}=(-4, -4, 3)$, $\vec{b}=(113, -5, -2)$, $\vec{c}=(17, 3, 1)$.

Задание 7. Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1. $\vec{a}=(0, 4, -3)$, $\vec{b}=(-1, 2, 2)$.

2. $\vec{a}=(2, 1, -2)$, $\vec{b}=(0, -2, -3)$.

3. $\vec{a}=(4, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$.

4. $\vec{a}=(1, 2, 0)$, $\vec{b}=(2, 1, 1)$.

5. $\vec{a}=(4, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$.

6. $\vec{a}=(1, 4, -7)$, $\vec{b}=(-1, 2, 2)$.

7. $\vec{a}=(10, 1, -5)$, $\vec{b}=(3, -2, -3)$.

8. $\vec{a}=(-14, 11, 3)$, $\vec{b}=(3, 2, -2)$.

9. $\vec{a}=(13, 2, 0)$, $\vec{b}=(24, 1, 1)$.

10. $\vec{a}=(51, 1, -3), \vec{b}=(1, 2, -2)$.

Задание 8.

1. Даны точки $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2)$. Найти модуль и направление вектора AB

2. Найти $|2\vec{a}+3\vec{b}|$, если $\vec{a}=(1.5, 0, -4), \vec{b}=(0, 0, 4)$.

3. При каком значении n векторы $\vec{a}=(3, -2, 1)$ и $\vec{b}=(n, 4, 0.5)$ ортогональны?

4. Найти $(\vec{c}, \vec{d})$, если $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}, \vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}, |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 120° .

5. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}, |\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60° .

6. Вычислить $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $|\vec{a}|=2\sqrt{2}, |\vec{b}|=4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135° .

7. Найти внешний угол B в треугольнике ABC , если $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2), C(2, -3, 1)$.

8. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=6$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60° .

9. Найти $\vec{c}=2\vec{a}, \vec{d}=\vec{b}-\vec{a}, |\vec{c}|, |\vec{d}|, \vec{d}^2, (\vec{c}, \vec{d})$, угол между векторами $\vec{c}, \vec{d}$, если $\vec{a}=(2, -1, -2), \vec{b}=(8, -4, 0)$.

10. Построить параллелограмм на векторах $OA=(1, 1, 0), OB=(0, -3, 1)$. Определить диагонали и их длины.

Задание9.

1. Вычислить $[\vec{c}, \vec{d}]$, если

$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}, \vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = (-1, 0, 3), \vec{b} = (1, 1, 2).$$

2. Найти $\|\vec{c}, \vec{d}\|$, если $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 30° .

3. Вычислить площадь треугольника ABC , если $A(2, -2, 3), B(-3, -6, 0), C(4, -3, -1)$.

4. Лежат ли точки $A(2, -1, -3), B(-4, 1, -2), C(0, -6, 3), D(-12, -2, 5)$ в одной плоскости?

5. Лежат ли точки $A(1, -2, 3), B(0, 1, 0), C(1, 2, -1), D(4, -1, 7)$ в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = (2, -2, 6), \vec{b} = (-6, 6, 3), \vec{c} = (3, -2, 5)$.

7. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP , площади граней тетраэдра, если $A(1, -3, -5), B(-1, 2, -4), C(0, 0, -2), D(-6, -1, -2)$.

8. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP , медианы граней, площади граней тетраэдра, если $A(2, -1, 2), B(5, 5, 5), C(3, 2, 0), D(4, 1, 4)$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, длины диагоналей параллелограмма, угол между $\vec{a}$ и $\vec{p}$, и проекцию $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{c}=6\vec{a}+10\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-6\vec{b}$, $\vec{f}=3\vec{a}-6\vec{b}$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135° .

Задание 10.

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины A , и медианы, проведенной из вершины B , треугольника ABC , если $A(-1, -5)$, $B(3, -1)$, $C(1, -2)$.

2. Написать уравнение стороны квадрата $ABCD$, если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1, -1)$, $B(-3, 3)$.

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(8, 6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки $A(5, 4)$ до прямой, проходящей через точки $B(1, -2)$, $C(0, 3)$.

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(1, 4)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $-2x+5y-2=0$.

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(-1, 5)$ и точку пересечения прямых $5x+3y-1=0$ и $4x+5y+7=0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 1, 2)$, перпендикулярно вектору AB , если $B(-1, 2, 3)$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1, 2, -3)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $4x+y-2z+2=0$.

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, -1, 3)$ и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ и $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

3. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении.

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«Отлично»	обучающийся ясно изложил условия задач, решения обосновал
«Хорошо»	обучающийся ясно изложил условия задач, но в обосновании решений имеются сомнения;
«Удовлетворительно»	обучающийся изложил решение задач, но в решении есть ошибки;
«Неудовлетворительно»	обучающийся не уяснил условия задач, решения не обосновал, либо не сдал работу на проверку.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем
управления**

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

Наименование темы

Выполнил: студент __ курса

_____отделения

по направлению _____

Ф.И.О.

Научный руководитель:

должность, звание

Ф.И.О.

Оценка _____

Дата «__» _____ 2021г.

Чебоксары 2021