

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Агафонов Александр Викторович
Должность: директор филиала
Дата подписания: 18.06.2025 15:33:20
Уникальный программный ключ:
25394778

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем
управления**



**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению расчетно-графических работ №1 по дисциплине
«Математика»**

Специальность	<u>23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»</u> (код и наименование направления подготовки)
Специализация	<u>Автомобили и тракторы</u> (наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	инженер
Форма обучения	очная, заочная

Чебоксары, 2022

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями
ФГОС ВО по специальности

23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»

Авторы:

Кульпина Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры Информационных технологий, электроэнергетики и систем
управления

Методические указания одобрены на заседании кафедры Информационных
технологий, электроэнергетики и систем управления

протокол № 10 от 14.05.2022 года.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и организация выполнения расчетно-графической работы	4
2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы	4
3. Требования к оформлению расчетно-графической работы	6
4. Теоретический материал и примеры решения задач	6
5. Задания расчётно-графической работы №1	18
6. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении	28
7. Рекомендуемая литература	28
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для написания РГР	29
9. Приложения	32

1. Цель и организация выполнения расчетно-графической работы

В соответствии с учебным планом по специальности **23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»** обучающиеся в процессе изучения дисциплины «Математика» выполняют расчетно-графическую работу №1.

Цель расчетно-графической работы - выявить знания студентов методологических основ математики, умение применять эти знания в анализе социально-экономических явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь вычислять пределы, находить производные, находить интегралы. Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Математика», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к экзамену не допускаются.

2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Титульный лист является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

Во введении содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

В расчетной части обучающийся должен показать умение применять математические методы расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты - до 0,001, а проценты - до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

В заключении расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

3. Требования к оформлению расчетно-графической работы

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы - 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта - 14 пунктов, интервал - 1,5).
2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.
3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.
4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.

5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные подписи.

6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

4. Теоретический материал и примеры решения задач

Матрицы и операции над ними

Сложение (вычитание) матриц одинакового размера производится поэлементно.

$$C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A = \lambda B, a_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

Умножение матрицы на матрицу определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на $B_{n \times p}$ называется матрица $C_{m \times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием*. Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^t .

Пример. Найти матрицу $C = 2A + B^t$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1-3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Решение. } C = 2A + B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -3 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Определители

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое *определителем*.

Определитель матрицы второго порядка вычисляется по формуле

$$|A| = \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы третьего порядка вычисляется по *правилу треугольников* или *Саррюса*

$$|A| = \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определитель матрицы второго порядка вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$: а) по правилу

треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

Решение.

а)

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \cdot 4 = 12 - 6 - 10 + 2 + 30 - 12 = 16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 5 - (-1) \cdot (-3)) = -12,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 0.$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-12) + 4 \cdot 0 = 16.$$

Ранг матрицы

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, для которой справедливо равенство $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 способ. Находим определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Значит

матрица имеет обратную.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & -7 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 16 & 28 & -24 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

2 способ. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 15, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -13, A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Подставим найденные значения дополнений и определителя в формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет

вид

Решение. а) Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных, } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов.}$$

Определитель системы $\Delta = -7 \neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

в) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array} \right)$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -3x_2 - x_3 = -4, \\ 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем $x_3 = \frac{7}{7} = 1$, из второго уравнения

$$x_2 = \frac{4 - x_3}{3} = \frac{4 - 1}{3} = 1, \text{ и из первого } x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1.$$

Векторная алгебра

Операции над векторами

Скалярное произведение векторов

Вектором называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *линейно-независимыми*, если $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. В противном случае, они линейно-зависимы.

Длиной (модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина $\vec{a}(x, y)$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Векторы называются *коллинеарными*, если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

1) сложение: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

2) умножение на число $\lambda \vec{a} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Углы наклона $\vec{a}$ к осям координат называются *направляющими косинусами*.

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$\text{пр}_{\vec{a}} = |\vec{a}| \cos \varphi,$$

где φ - угол наклона вектора $\vec{a}$ к оси l .

Скалярным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

В координатной форме

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Угол между векторами $\vec{a}, \vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Пример. Найти длину $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и разложить его по $\vec{a}, \vec{b}$, если

$$\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (1, -2), \vec{c} = (-1, 1).$$

Решение. Найдем координаты $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3, -1) + (1, -2) + (-1, 1) = (3, -2)$.

$$\text{Длина вектора } \vec{d} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Разложить по $\vec{a}, \vec{b}$ - значит, представить в виде $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. Для определения α, β , запишем в виде

$$\alpha \cdot (3, -1) + \beta \cdot (1, -2) = (3, -2)$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = -2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{3}{5}$, то есть $\vec{d} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Решение. } \cos \varphi = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2}} =$$

$$= \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{13}}.$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$

В координатной форме

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения.

Пример. Найти вектор $\vec{d}$, ортогональный $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-7, 0, 2)$, для которого скалярное произведение с $\vec{c} = (1, 1, 1)$ равно 3.

Решение. Искомый вектор коллинеарен $\vec{a} \times \vec{b}$. Следовательно, он равен $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, -23, 14).$$

Тогда $\vec{d} = (4\lambda, -23\lambda, 14\lambda)$.

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = 4\lambda \cdot 1 - 23\lambda \cdot 1 + 14\lambda \cdot 1 = -5\lambda = 3, \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \vec{d} = \left(-\frac{12}{5}, \frac{69}{5}, -\frac{42}{5}\right).$$

5. Задания расчётно-графической работы №1.

Задание1. Даны матрицы A и B . Найдите матрицу C .

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = 2A + 3B.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, C = 3B - 2A.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, C = 3A - B.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 7 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = A + 2B.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, C = 2B - A^t.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = (2A)^t + B.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = A + 2B^t.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = 2A^t - B^t.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 17 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 18 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = (12A)^t - B.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 6 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = A + 15B$$

Задание2. Найдите произведение матриц $A \cdot B$ или значение матричного многочлена. Существует ли произведение $B \cdot A$?

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} -4 & 34 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. $f(x) = 2x^2 - 5x + 3,$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5,$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 3,$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. $f(x) = 12x^2 + 5x + 3,$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 37 & -11 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$

Задание 3. Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$10. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задание 4. Найдите обратную матрицу для матрицы A . Сделайте проверку.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 8 & 3-8 \\ 20-1 & 0 \\ -1-2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 13 & 3-1 & 2 \\ 2-12 & 8 & 5 \\ 1 & 10-6 & 19 \end{pmatrix}.$$

Задание5. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 3y + 4z = 3, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 2y + 3z = 12, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x - y + z = -17, \\ x - 3y + 2z = -11, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 4x - y - z = -3, \\ x + 3y + 3z = -4, \\ -x + 2y - z = 5. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x - y + z = -16, \\ 2x - 3y + 2z = -11, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x - y - z = -3, \\ x + 2y + 3z = -4, \\ -x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + y + z = -1, \\ 6x - y + 2z = -4, \\ 2x + y + 4z = -1. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x + y + 4z = 1, \\ 2x + y - z = 1, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

Задание6. Найти линейную комбинацию векторов.

1. $3\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$, где $\vec{a} = (4, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$, $\vec{c} = (10, 8, 1)$.
2. $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$, где $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -2)$.
3. $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 3(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a} = (4, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$, $\vec{c} = (10, 8, 1)$.
4. $4\vec{a} + 19\vec{b} - \vec{c}$, где $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\vec{b} = (10, -5, -2)$, $\vec{c} = (187, 8, 1)$.
5. $18\vec{a} + 3\vec{b} + 7\vec{c}$, где $\vec{a} = (-6, 2, 0)$, $\vec{b} = (54, 1, 1)$, $\vec{c} = (-90, 1, -2)$.
6. $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 13(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a} = (45, -9, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$, $\vec{c} = (131, 9, 1)$.
7. $13\vec{a} + 6\vec{b} - \vec{c}$, где $\vec{a} = (-10, 1, 9)$, $\vec{b} = (1, 7, -2)$, $\vec{c} = (10, 5, 1)$.
8. $-5\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}$, где $\vec{a} = (-7, 2, 0)$, $\vec{b} = (-5, 1, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -2)$.
9. $2(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 7(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a} = (4, -8, 3)$, $\vec{b} = (90, 2, -2)$, $\vec{c} = (10, 8, 1)$.
10. $14\vec{a} + 19\vec{b} - \vec{c}$, где $\vec{a} = (-4, -4, 3)$, $\vec{b} = (113, -5, -2)$, $\vec{c} = (17, 3, 1)$.

Задание7. Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1. $\vec{a} = (0, 4, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 2)$.
2. $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (0, -2, -3)$.
3. $\vec{a} = (4, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$.
4. $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$.
5. $\vec{a} = (4, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

6. $\vec{a} = (1, 4, -7), \vec{b} = (-1, 2, 2)$.

7. $\vec{a} = (10, 1, -5), \vec{b} = (3, -2, -3)$.

8. $\vec{a} = (-14, 11, 3), \vec{b} = (3, 2, -2)$.

9. $\vec{a} = (13, 2, 0), \vec{b} = (24, 1, 1)$.

10. $\vec{a} = (51, 1, -3), \vec{b} = (1, 2, -2)$.

Задание 8.

1. Даны точки $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2)$. Найти модуль и направление вектора $\vec{AB}$

2. Найти $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, если $\vec{a} = (1.5, 0, -4), \vec{b} = (0, 0, 4)$.

3. При каком значении n векторы $\vec{a} = (3, -2, 1)$ и $\vec{b} = (n, 4, 0.5)$ ортогональны?

4. Найти $(\vec{c}, \vec{d})$, если $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}, \vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b}, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 120° .

5. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60° .

6. Вычислить $(\vec{a} - \vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{b}| = 4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135° .

7. Найти внешний угол B в треугольнике ABC , если $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2), C(2, -3, 1)$.

8. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60° .

9. Найти $\vec{c} = 2\vec{a}$, $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$, $|\vec{c}|$, $|\vec{d}|$, $\vec{d}^2$, $(\vec{c}, \vec{d})$, угол между векторами $\vec{c}$, $\vec{d}$, если $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (8, -4, 0)$.

10. Построить параллелограмм на векторах $OA = (1, 1, 0)$, $OB = (0, -3, 1)$. Определить диагонали и их длины.

Задание 9.

1. Вычислить $[\vec{c}, \vec{d}]$, если

$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}, \vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = (-1, 0, 3), \vec{b} = (1, 1, 2).$$

2. Найти $[\vec{c}, \vec{d}]$, если $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 30° .

3. Вычислить площадь треугольника ABC , если $A(2, -2, 3)$, $B(-3, -6, 0)$, $C(4, -3, -1)$.

4. Лежат ли точки $A(2, -1, -3)$, $B(-4, 1, -2)$, $C(0, -6, 3)$, $D(-12, -2, 5)$ в одной плоскости?

5. Лежат ли точки $A(1, -2, 3)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 2, -1)$, $D(4, -1, 7)$ в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = (2, -2, 6)$, $\vec{b} = (-6, 6, 3)$, $\vec{c} = (3, -2, 5)$.

7. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP , площади граней тетраэдра, если $A(1, -3, -5)$, $B(-1, 2, -4)$, $C(0, 0, -2)$, $D(-6, -1, -2)$.

8. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP , медианы граней, площади граней тетраэдра, если $A(2, -1, 2)$, $B(5, 5, 5)$, $C(3, 2, 0)$, $D(4, 1, 4)$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, длины диагоналей параллелограмма, угол между $\vec{a}$ и $\vec{p}$, и проекцию $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{c} = 6\vec{a} + 10\vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$, $\vec{f} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135° .

Задание 10.

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины A , и медианы, проведенной из вершины B , треугольника ABC , если $A(-1, -5)$, $B(3, -1)$, $C(1, -2)$.

2. Написать уравнение стороны квадрата $ABCD$, если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1, -1)$, $B(-3, 3)$.

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(8, 6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки $A(5, 4)$ до прямой, проходящей через точки $B(1, -2)$, $C(0, 3)$.

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(1, 4)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $-2x + 5y - 2 = 0$.

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(-1, 5)$ и точку пересечения прямых $5x + 3y - 1 = 0$ и $4x + 5y + 7 = 0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 1, 2)$, перпендикулярно вектору AB , если $B(-1, 2, 3)$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1, 2, -3)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $4x + y - 2z + 2 = 0$.

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, -1, 3)$ и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ и $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

6. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении.

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«Отлично»	обучающийся ясно изложил условия задач, решения обосновал
«Хорошо»	обучающийся ясно изложил условия задач, но в обосновании решений имеются сомнения;
«Удовлетворительно»	обучающийся изложил решение задач, но в решении есть ошибки;
«Неудовлетворительно»	обучающийся не уяснил условия задач, решения не обосновал, либо не сдал работу на проверку.

7. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 401 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07001-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/488864>.
2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Задачник : учебное пособие для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 192 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-7568-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/489755>.
3. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 401 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07001-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510750>

Дополнительная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для вузов / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 439 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07535-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/490684> .
2. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для вузов / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 320 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07533-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/490686> .

Периодика

1. Журнал технических исследований : сетевой научный журнал / гл. ред. Н. А. Салькова. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — URL:

Периодика

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки / гл. ред. Кревчик В.Д. — Пенза, 2021. — URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/314991>. — Текст : электронный

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для написания РГР

9. Профессиональная база данных и информационно-справочные системы	Информация о праве собственности (реквизиты договора)
Ассоциация инженерного образования России http://www.ac-raee.ru/	Совершенствование образования и инженерной деятельности во всех их проявлениях, относящихся к учебному, научному и технологическому направлениям, включая процессы преподавания, консультирования, исследования, разработки инженерных решений, включая нефтегазовую отрасль, трансфера технологий, оказания широкого спектра образовательных услуг, обеспечения связей с общественностью, производством, наукой и интеграции в международное научно-образовательное пространство. свободный доступ
научная электронная библиотека Elibrary http://elibrary.ru/	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU - это крупнейший российский информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины и образования, содержащий рефераты и полные тексты более 26 млн научных статей и публикаций, в том числе электронные версии более 5600 российских научно-технических журналов, из которых

9. Профессиональная база данных и информационно-справочные системы	Информация о праве собственности (реквизиты договора)
	более 4800 журналов в открытом доступе свободный доступ
Федеральный портал «Российское образование» [Электронный ресурс] – http://www.edu.ru	Федеральный портал «Российское образование» – уникальный интернет-ресурс в сфере образования и науки. Ежедневно публикует самые актуальные новости, анонсы событий, информационные материалы для широкого круга читателей. Ежедневно на портале размещаются эксклюзивные материалы, интервью с ведущими специалистами – педагогами, психологами, учеными, репортажи и аналитические статьи. Читатели получают доступ к нормативно-правовой базе сферы образования, они могут пользоваться самыми различными полезными сервисами – такими, как онлайн-тестирование, опросы по актуальным темам и т.д.

Название организации	Сокращённое название	Организационно-правовая форма	Отрасль (область деятельности)	Официальный сайт
РОССИЙСКИЙ СОЮЗ научных и инженерных общественных объединений	РосСНИО	неправительственное, независимое общественное объединение	творческий Союз общественных научных, научно-технических, инженерных, экономических объединений, являющихся юридическими лицами, созданный на основе общности творческих профессиональных интересов ученых, инженеров и специалистов для	http://rusea.info

			реализации общих целей и задач.	
Российский союз инженеров	РСИ	Общероссийская общественная организация «Российский союз инженеров» (далее именуемая «Союз») является основанным на членстве общественным объединением, созданным в форме общественной организации	Защита общих интересов и достижения уставных целей объединившихся граждан, осуществляющих свою деятельность на территории более половины субъектов Российской Федерации	http://российский-союз-инженеров.рф/

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем
управления**

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

Наименование темы

Выполнил: студент __ курса
_____ отделения
по направлению 23.05.01
«Наземные транспортно-
технологические средства»

Ф.И.О.

Научный руководитель:

должность, звание

Ф.И.О.

Оценка _____

Дата «__» _____ 2022г.

Чебоксары 2022