МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению расчетно-графических работ №1 по дисциплине «Математика»

Направление подготовки	**08.05.01**
	(код и наименование направления подготовки)
Направленность подготовки	
	(наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	**Специалист**
Форма обучения	**очная**

Чебоксары, 2024

Методические рекомендации по выполнению расчетно-графических работ №1 по дисциплине «Математика» для обучающихся по специальности 08.05.01. Учебно-методическое пособие. – Чебоксары: Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического института, 2024.

Составитель: к.ф.-м.н., доцент Кульпина Т. А.

1. **Цель расчетно-графической работы** - выявить знания студентов методологических основ математики, умение применять эти знания в анализе социально-экономических явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь вычислять пределы, находить производные, находить интегралы. Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Математика», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к экзамену не допускаются.

2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Титульный лист является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

Во введении содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

В расчетной части обучающийся должен показать умение применять математические методы расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты - до 0,001, а проценты - до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

В заключении расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

3. Требования к оформлению расчетно-графической работы

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы - 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта - 14 пунктов, интервал - 1,5).
2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.
3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.
4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.
5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные подписи.

6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

4. Теоретический материал и примеры решения задач

Матрицы и операции над ними

Сложение (вычитание) матриц одинакового размера производится поэлементно.

$$C = A + B,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A = \lambda B, a_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

Умножение матрицы на матрицу определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием.* Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^t.

Пример. Найти матрицу $C = 2A + B^t$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. $C = 2A + B' = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -3 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Определители

Каждой квадратной матрице можно поставит в соответствие число, называемое *определителем.*

Определитель матрицы *второго порядка* вычисляется по формуле

$$|A| = \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы *третьего порядка* вычисляется по *правилу треугольников* или *Саррюса*

$$|A| = \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определитель матрицы *второго порядка* вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$: а) по правилу треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

Решение. а)

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \cdot 4 =$$
$$= 12 - 6 - 10 + 2 + 30 - 12 = 16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = -4, \; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 5 - (-1) \cdot (-3)) = -12,$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 0.$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-12) + 4 \cdot 0 = 16.$$

Ранг матрицы

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, для которой справедливо равенство $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t.$$

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 способ. Находим определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$ Значит матрица имеет обратную.

$$\left(A|E\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & -7 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 16 & 28 & -24 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E\ .$$

2 способ. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 15,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -13,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Подставим найденные значения дополнений и определителя в формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^{t}.$$

Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} -коэффициенты при неизвестных, b_m - свободные члены.

Основными методами решения СЛАУ являются метод Гаусса, матричный метод и правило Крамера. Метод Гаусса применим для решения любой СЛАУ, в то время как метод Крамера и матричный метод могут быть использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей.

Для решения *методом Гаусса* составляют расширенную матрицу системы, которую затем с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных.

Решение системы *матричным методом* или *методом обратной матрицы* определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B .$$

По формулам Крамера :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ - определитель системы, Δ_j - определители, полученные из определителя системы заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Пример. Решить СЛАУ: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. а) Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

Определитель системы $\Delta = -7 \neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

в) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -3x_2 - x_3 = -4, \\ 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем $x_3 = \frac{7}{7} = 1$, из второго уравнения $x_2 = \frac{4 - x_3}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$, и из первого $x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1$.

Векторная алгебра

Операции над векторами

Скалярное произведение векторов

Вектором называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *линейно-независимыми*, если $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. В противном случае, они линейно-зависимы.

Длиной (модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина $\vec{a}(x, y)$ определяется по формуле $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Векторы называются *коллинеарными,* если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

1) сложение: $\vec{a}+\vec{b}=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$;

2) умножение на число $\lambda\vec{a}=\lambda(x_1,y_1,z_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$.

Углы наклона $\vec{a}$ к осям координат называются *направляющими косинусами.*

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

причем

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$\text{ïð}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi,$$

где φ - угол наклона вектора $\vec{a}$ к оси l.

Скалярным произведением $\vec{a},\vec{b}$ называется число

$$(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

В координатной форме

$$(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Пример. Найти длину $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и разложить его по $\vec{a}, \vec{b}$, если

$$\vec{a} = (3,-1), \vec{b} = (1,-2), \vec{c} = (-1, 1).$$

Решение. Найдем координаты $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3,-1) + (1,-2) + (-1, 1) = (3,-2)$.

Длина вектора $\vec{d} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Разложить по $\vec{a}, \vec{b}$ - значит, представить в виде $\vec{d} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b}$. Для определения α, β, запишем в виде

$$\alpha\cdot(3,-1) + \beta\cdot(1,-2) = (3,-2)$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = -2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $\alpha = \frac{4}{5} \beta = \frac{3}{5}$, то есть $\vec{d} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}$.

Решение. $\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + |\vec{b}|^2}\cdot\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a},\vec{b}) + |\vec{b}|^2}} =$

$$= \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{4^2 + 2\cdot4\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 3^2}\cdot\sqrt{4^2 - 2\cdot4\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{13}}.$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi .$$

В координатной форме

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} .$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения.

Пример. Найти вектор $\vec{d}$, ортогональный $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-7, 0, 2)$, для которого скалярное произведение с $\vec{c} = (1,1,1)$ равно 3.

Решение. Искомый вектор коллинеарен $\vec{a} \times \vec{b}$. Следовательно, он равен $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, -23, 14) .$$

Тогда $\vec{d} = (4\lambda, -23\lambda, 14\lambda)$.

$$\vec{d}\cdot\vec{c} = 4\lambda\cdot 1 - 23\lambda\cdot 1 + 14\lambda\cdot 1 = -5\lambda = 3,\ \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \vec{d} = \left(-\frac{12}{5}, \frac{69}{5}, -\frac{42}{5}\right).$$

5. Задания расчётно-графической работы №1.

<u>Задание1.</u> Даны матрицы A и B. Найдите матрицу C.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = 2A + 3B$.

2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, C = 3B - 2A$.

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, C = 3A - B$.

4. $A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 7 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = A + 2B$.

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, C = 2B - A^t$.

6. $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = (2A)^t + B$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = A + 2B^t$.

8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = 2A^t - B^t$.

9. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 17 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 18 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C=(12A)^t-B.$

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 6 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C=A+15B$

<u>Задание2.</u> Найдите произведение матриц $A\cdot B$ или значение матричного многочлена. Существует ли произведение $B\cdot A$?

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix} -4 & 34 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$

6. $f(x)=2x^2-5x+3,$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

7. $f(x)=3x^2+2x-5,$

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

8. $f(x)=x^3-7x^2+3,$

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\2&0&-4\\0&3&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&1&3\\0&3&0\\1&-4&1\end{pmatrix}.$$

9. $f(x)=12x^2+5x+3,$

$$A=\begin{pmatrix}-6&3\\-10&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}37&-11\\12&4\end{pmatrix}.$$

10. $A=\begin{pmatrix}9&0&1\\4&1&-7\\1&2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\8&-1&1\\1&9&-1\end{pmatrix}.$

Задание3. Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&0&1\end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix}4&1&-3\\2&0&-4\\0&3&5\end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

Задание4. Найдите обратную матрицу для матрицы A. Сделайте проверку.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 20 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 19 \end{pmatrix}$.

Задание5. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

1. $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+3y+4z=3, \\ 2x-y-z=1, \\ x+2y+3z=5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-5y+3z=-1, \\ x-y+z=1. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x+3y-z=4, \\ -x+2y+3z=12, \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-y+z=-17, \\ x-3y+2z=-11, \\ 2x+y+z=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 4x-y-z=-3, \\ x+3y+3z=-4, \\ -x+2y-z=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-y+z=-16, \\ 2x-3y+2z=-11, \\ 2x+y+z=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x-y-z=-3, \\ x+2y+3z=-4, \\ -x+2y-z=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 6x-y+2z=-4, \\ 2x+y+4z=-1. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x+y+4z=1, \\ 2x+y-z=1, \\ x+2y+3z=5. \end{cases}$

Задание6. Найти линейную комбинацию векторов.

1. $3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(4,1,3), \vec{b}=(1,2,-2), \vec{c}=(10,8,1).$

2. $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(1,2,0), \vec{b}=(2,1,1), \vec{c}=(-1,1,-2).$

3. $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+3(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4,1,3), \vec{b}=(1,2,-2), \vec{c}=(10,8,1).$

4. $4\vec{a}+19\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(2,-4,3), \vec{b}=(10,-5,-2), \vec{c}=(187,8,1).$

5. $18\vec{a}+3\vec{b}+7\vec{c}$, где $\vec{a}=(-6,2,0), \vec{b}=(54,1,1), \vec{c}=(-90,1,-2).$

6. $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+13(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(45,-9,3), \vec{b}=(1,2,-2), \vec{c}=(131,9,1).$

7. $13\vec{a}+6\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(-10,1,9), \vec{b}=(1,7,-2), \vec{c}=(10,5,1).$

8. $-5\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(-7,2,0), \vec{b}=(-5,1,1), \vec{c}=(-1,1,-2).$

9. $2(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+7(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4,-8,3), \vec{b}=(90,2,-2), \vec{c}=(10,8,1).$

10. $14\vec{a}+19\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(-4,-4,3), \vec{b}=(113,-5,-2), \vec{c}=(17,3,1).$

Задание7. Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1. $\vec{a}=(0,4,-3), \vec{b}=(-1,2,2).$

2. $\vec{a}=(2,1,-2), \vec{b}=(0,-2,-3).$

3. $\vec{a}=(4,1,3), \vec{b}=(1,2,-2)$.

4. $\vec{a}=(1,2,0), \vec{b}=(2,1,1)$.

5. $\vec{a}=(4,1,3), \vec{b}=(1,2,-2)$.

6. $\vec{a}=(1,4,-7), \vec{b}=(-1,2,2).$

7. $\vec{a}=(10,1,-5), \vec{b}=(3,-2,-3).$

8. $\vec{a}=(-14,11,3), \vec{b}=(3,2,-2)$.

9. $\vec{a}=(13,2,0), \vec{b}=(24,1,1)$.

10. $\vec{a}=(51,1,-3), \vec{b}=(1,2,-2)$.

Задание8.

1. Даны точки $A(2,-1,4), B(4,0,2)$. Найти модуль и направление вектора AB

2. Найти $\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|$, если $\vec{a}=(1.5,0,-4), \vec{b}=(0,0,4)$.

3. При каком значении n векторы $\vec{a}=(3,-2,1)$ и $\vec{b}=(n,4,0.5)$ ортогональны?

4. Найти $(\vec{c},\vec{d})$, если $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}, \vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}, |\vec{a}|=2, \left|\vec{b}\right|=3,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 120^o.

5. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}, |\vec{a}|=3, \left|\vec{b}\right|=4,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60^o.

6. Вычислить $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$, если $|\vec{a}|=2\sqrt{2}, \left|\vec{b}\right|=4,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135^o.

7. Найти внешний угол B в треугольнике ABC, если $A(2,-1,4), B(4,0,2), C(2,-3,1).$

8. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1, \left|\vec{b}\right|=6,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60^o.

9. Найти $\vec{c}=2\vec{a}, \vec{d}=\vec{b}-\vec{a}, |\vec{c}|, \left|\vec{d}\right|, \vec{d}^{\,2}, (\vec{c},\vec{d})$, угол между векторами $\vec{c},\vec{d}$, если $\vec{a}=(2,-1,-2), \vec{b}=(8,-4,0)$.

10. Построить параллелограмм на векторах $OA=(1,1,0), OB=(0,-3,1)$. Определить диагонали и их длины.

<u>Задание9.</u>

1. Вычислить $\left[\vec{c},\vec{d}\right]$, если

$\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}, \vec{d}=-2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}=(-1,0,3), \vec{b}=(1,1,2).$

2. Найти $\left|\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right|$, если $\vec{c}=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{d}=-\vec{a}+3\vec{b}, |\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=2,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 30^o.

3. Вычислить площадь треугольника ABC, если $A(2,-2,3),\ B(-3,-6,0),\ C(4,-3,-1)$.

4.Лежат ли точки $A(2,-1,-3),\ B(-4,1,-2),\ C(0,-6,3),\ D(-12,-2,5)$ в одной плоскости?

5. Лежат ли точки $A(1,-2,3),\ B(0,1,0),\ C(1,2,-1),\ D(4,-1,7)$ в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=(2,-2,6)$, $\vec{b}=(-6,6,3)$,

$\vec{\tilde{n}}=(3,-2,5)$.

7. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP, площади граней тетраэдра, если $A(1,-3,-5),\ B(-1,2,-4),\ C(0,0,-2), D(-6,-1,-2)$.

8. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP, медианы граней, площади граней тетраэдра, если $A(2,-1,2),\ B(5,5,5),\ C(3,2,0), D(4,1,4)$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, длины диагоналей параллелограмма, угол между $\vec{a}$ и $\vec{p}$, и проекцию $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{c}=6\vec{a}+10\vec{b}, \vec{d}=3\vec{a}-6\vec{b}, \vec{f}=3\vec{a}-6\vec{b}, |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135^o.

<u>Задание10.</u>

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины A, и медианы, проведенной из вершины B, треугольника ABC, если $A(-1,-5),\ B(3,-1),\ C(1,-2)$.

2. Написать уравнение стороны квадрата $ABCD$, если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1,-1),\ B(-3,3)$.

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(8,6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки $A(5,4)$ до прямой, проходящей через точки $B(1,-2)$, $C(0,3)$.

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(1,4)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $-2x+5y-2=0$.

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(-1,5)$ и точку пересечения прямых $5x+3y-1=0$ и $4x+5y+7=0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,2)$, перпендикулярно вектору AB, если $B(-1,2,3)$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1,2,-3)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $4x+y-2z+2=0$.

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-1,3)$ и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x-\sqrt{2}y+z-1=0$ и $x+\sqrt{2}y-z+3=0$.

6. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении.

Критерии оценки расчетно-графической работы:

оценка «зачтено» выставляется обучающемуся в том случае, если все задачи решены, к задачам приведены пояснения;

оценка «не зачтено» ставится в том случае, если какая-либо задача отсутствует или приведены недостаточные пояснения к решению задачи.

Типовые ошибки при выполнении расчетно-графической работы

При выполнении расчетно-графической работы по математике часто встречаются следующие ошибки:

1. Не соблюдены правила оформления расчетно-графической работы.
2. Не выдержана структура расчетно-графической работы (отсутствует библиографический список, теоретическая часть к задаче и т. д.).
3. Не указаны единицы измерения полученных результатов.
4. В задаче отсутствуют выводы или содержимое выводов к задаче неконструктивны.
5. Отсутствие готовности обучающегося отвечать на теоретические вопросы, являющиеся основой для решения задачи.
6. Не соблюдаются правила математического округления полученного результата.
7. Задание на расчетно-графическую работу выполнено не по своему варианту.

7. Рекомендуемая литература

а) основная литература

1. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. - М. : Айрис-пресс, 2010. – 592 с.
2. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. - М. : Айрис-пресс, 2006. – 576 с.
3. Баврин И. И. Высшая математика : учебник / И. И. Баврин . - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : ВЛАДОС, 2004. – 560 с.
4. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стереотип. - М. : Высш. шк., 2006. – 304 с.
5. Шипачев В. С. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с. - Режим доступа : http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469720
6. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2-х ч. Ч. 1 / П. Е. Данко [и др.]. - 6-е изд. - М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2006.

б) дополнительная литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: тридцать шесть лекций. В 2-х частях. Ч. 1 / Д. Т. Письменный . - 6-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2006. – 288 с.
2. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. - М. : Астрель; АСТ, 2005. – 991 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд. стереотип. - М. : Интегралл-Пресс, 2004. - 416 с.

4. Данилов Ю. М. Математика: Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др.; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой; КГТУ. - М.: ИНФРА-М, 2006. - 496 с.
5. Березина Н. А. Математика: Учебное пособие / Н.А. Березина, Е.Л. Максина. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 175 с.

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для написания РГР

1. eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : электронная библиотека. – Режим доступа: http://elibrary.ru/defaultx.asp
2. Znanium.com [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа: http://znanium.com
3. «КнигаФонд» [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа : http://www.knigafund.ru
4. Электронный каталог Национальной библиотеки ЧР [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nbchr.ru.
5. Издательство ЛАНЬ [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа : https://e.lanbook.com/